UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

«Hæh? Er det der en modell liksom?»
Ei studie av R2 elevar si oppfatning av læringsutbyttet ved eit didaktisk kontraktbrot.

Ei masteroppgåve i matematikkdidaktikk

Peter Kjepso

Erfaringsbasert master i undervisning med fordjuping i matematikk, våren 2017

Ein stor takk til rettleiaren min, Christoph Kirfel, for god, inspirerande og tolmodig rettleiing.

Og ein stor takk til kona mi, Marianne Raa, for oppmuntring og ukueleg optimisme.

Innhald

Kapittel 1: Innleiing

Kapittel 1.1: Motivasjon for val av tema

Hovudmotivasjonen for oppgåva var at eg ville gjennomføre ei didaktisk studie av elevar med full fordjuping i matematikk på vidaregåande trinn. Det er fleire årsaker til dette.
Skuleåret 2015 – 2016 var det i underkant av 2% av elevane i vidaregåande som hadde vald full fordjuping i matematikk i Norge. (SSB 2016 og UDIR 2016). Sjølv om andelen i Norge er låg i internasjonal samanheng, er det sjølv i landa med høgast andel ikkje snakk om meir enn rundt 7% av elevmassen. (SSB 2016)
Av naturlege årsaker er det ikkje forska så mykje på desse elevane som det er for større elevgrupper.
Vidare hadde eg lyst å arbeide med modellering då eg tidlegare har hatt gode erfaringar med å bruke modellering som undervisningsmetode på lågare nivå.

Kapittel 1.2: Matematikkfaget sin eigenart og særstilling.

På bakgrunn av mi 23 år lange undervisningserfaring frå ungdomskule, vidaregåande og høgskulenivå vil eg hevde at matematikk som skulefag på mange vis står i ein særstilling blant faga i norsk skule:
For det første har vi den serielle oppbygginga av matematikken generelt og som skulefag spesielt. I dette legg eg at elevane sin progresjon i faget, i mykje større grad enn i andre fag, er avhengig av relevante forkunnskapar. Eit svært mykje brukt bilete på dette er ein murvegg under bygging, der kvar ny murstein som vert lagt opp på muren er avhengig av dei underliggande. På same vis er tanken om ny kunnskap i matematikk, representert ved ein murstein, heilt avhengig av tidlegare kunnskap om faget, då representert ved denne eine veggen. I andre teorifag vil biletet ofte være annleis. Desse er oftare bygde opp som modular, der overlappinga mellom modulane ofte liten. I naturfag t.d. vil ikkje undervisninga i biologidelen av faget være spesielt avhengig av forkunnskapar i fysikk, i norsk vil kunnskapar innan grammatikk ikkje være avgjerande relevante i analyse av lyrikk.
For det andre er oppfatninga av faget forskjellig frå andre fag blant det vi noko generelt kan kalle folk flest. Dette er eit inntrykk eg sit att med får svært mange samtalar med både elevar og foreldre. Faget blir generelt oppfatta som vanskeleg. Er ein flink i faget vert ein ofte automatisk sett på som spesielt evnesterk. Med unntak av fysikk i vidaregåande skule har

ingen andre fag tilsvarande status. Vidare er dette det einaste faget der det er vidstrekt sosial aksept å innrømme ein total mangel på både kunnskap og evner. I mange tilfelle gir det til og med høgare sosial status. Dette gjenspeglar seg i at sjølv om det er ein allmenn aksept for at faget er viktig, gir det ingen sosial status å studere det på høgskule- og universitetsnivå.
For det tredje er det blant eleva,r foreldre, lærarar, skuleleiarar skulebyråkratar og skulepolitikarar i stor grad ein sams oppfatning av korleis matematikkundervisning skal føregå. Ideen om korleis ein «skikkeleg» matematikktime skal gjennomførast er nær uavhengig av både fagleg nivå og aldersnivå, så vel som sosial og økonomisk status.
I grove trekk er den som følgjande:

- lærar kjem inn i klassen,
- læraren gjennomgår lekser,
- læraren gjennomgår nytt stoff,
- elevane reknar oppgåver knytt til det nye stoffet,
- elevane får lekser knytt til det nye stoffet,
- timen er slutt.

Læraren har ein forventning om elevane sine forskjellige faglege nivå, innsats, oppførsel og motivasjon. Han vil forsøke å legge det faglege nivået slik at det treff flest mogleg av elevane. Elevane har ei forventning både til korleis timen skal føregå både fagleg og didaktisk. Dei vil og ha ein forventning om korleis læraren skal te seg. Det er og underforstått ein forventning om at læraren ikkje skal undervise noko elevane ikkje har føresetnader for å forstå. Ein slik meir eller mindre eksplisitt forventning til dei didaktiske tilhøva ved ei undervisningsøkt i matematikk, er det Brousseau kalla «den didaktiske kontrakten». Gjennom svært mange samtalar med barneskulelærarar, ungdomskulelærarar og lærarar i den vidaregåande skulen opp gjennom åra, har eg grunn til å tru at det i den norske skulen stort sett gjeld den same kontrakten gjennom heile utdanningsløpet. I ingen andre fag vil vi finne ein slik dominans av ein spesiell didaktisk kontrakt i den moderne skulen. Det vil føre altfor langt utanfor problemstillinga til denne oppgåva å gå djupt inn i årsakene til situasjonen, men eg vil likevel på bakgrunn av m.a. mine eigne 20 år lange erfaring som lærar i den vidaregåande skulen, hevde følgjande:
At det i andre fag er utvikla nye didaktiske kontraktar som i all hovudsak vert suksessfullt implementert i den daglege undervisninga, gjer at det vert for enkelt å grunngje situasjonen i matematikkfaget berre med historiske årsaker. Det er grunn til å hevde at ein ikkje kan sjå bort ifrå ein viss grad av sjølvoppfyllande forventningar. Med dette meiner eg at for mange lærarar sitt vedkommande ligg det ein opplærd formeining om korleis ein matematikktime

skal gjennomførast. Stieg Mellin-Olsen gjekk så langt som å hevde at

«Lærerens vektlegging av oppgaveløsning er ikke bare et resultat av deres egne valg, den er institusjonalisert» *(Mellin -Olsen 2009)*

Ein annan delforklaring kan være dårlege erfaringar under andre kontraktregime. Nærmare bestemt tenkjer på eg den vidstrakte bruken av prosjektarbeid som undervisningsmetode som Reform 94 innførte. Erfaringane derifrå har ført til ein tilbakevending til det som av reformpedagogar vert referert til som «tradisjonell klasseromundervisning», med andre ord den opprinnlege didaktiske kontrakten. Den likevel langt viktigaste årsaka, spesielt for matematikkfaga i den vidaregåande skulen, er tidspress. Dette gjeld i særskild grad fag med sentralt gitt eksamen. Tidspresset gjer at ein som lærar vil ta i bruk undervisningsmetodar som er mest mogleg effektive, dvs metodar ein meiner gjev høgt læringsutbytte på kortast tid. Då er det min erfaring, at den tradisjonelle klasseromundervisninga er metoden som egnar seg best. At elevane opplever ein forlenging av den didaktiske kontrakten frå grunnskulen kan være ein av grunnane til det.

Kapittel 1.3: Formulering av problemstilling

På bakgrunn av det som er sagt ovanfor, vil det kunne være interessant å prøve å sei noko om korleis elevane vil oppfatte eit brot med den gjeldande didaktiske kontrakten.

Spesielt ville det vore interessant å undersøkt korleis dei vil oppleve ei eventuell endring i læringsutbyttet ved eit kontraktbrot når dei samanlikna det med undervisninga som ligg innanfor den vanlege kontrakten. Som vi skal komme tilbake til i kapittel 3 om metodeval, vil ikkje det empiriske grunnlaget for oppgåva resultere i direkte målingar av læringsutbyttet til elevane basert på samanlikningar av karakterar og testar. Dette er fordi fokuset vil være på korleis elevane opplever eventuelle endringar i læringsutbyttet. I ein slik samanheng vil det og være naturleg å prøve å få fram årsakene som ligg til grunn for oppfatningane elevane gjev uttrykk for.

Av årsaker eg skal komme tilbake til i kapittel 2 vil teorigrunnlaget for oppgåva basere seg på to hovudpilarar, det teoretiske grunnlaget for modellering og tankane til Brousseau om den didaktiske situasjonen. Eg såleis formulere følgjande problemstilling for denne oppgåva:

Sett i lys av det teoretiske grunnlaget for modellering som undervisningsmetode og i lys av tankane til Guy Brousseau rundt den adidaktiske situasjonen, korleis vil elevane i ein

R2 klasse oppleve endringane i læringsutbyttet sitt ved eit brot med den gjeldande didaktiske kontrakten?

Kapittel 2: Teoretisk bakgrunn

Kapittel 2.1: Innleiing

Teorigrunnlaget for denne oppgåva er bygd på to pilarar: Det teoretiske rammeverket rundt modellering innan matematikkundervisning og tankane til Guy Brousseau rundt den didaktiske kontrakten. Årsaka til denne todelinga er at eg i denne oppgåva i all hovudsak betraktar modelleringa som det metodiske undervisningsverktøyet, medan Brousseau sine tankar har som føremål å fungere som det sentrale teoretiske forklaringsverktøyet.

Sjølv om eg såleis har ein praktisk og konkret tilnærming til modellering som undervisningsmetode, finn eg det både naudsynt og opplysande å gå inn på den pedagogiske teorien som ligg til grunn for metoden. Når det er sagt, må eg likevel få påpeike at denne oppgåve er ei praktisk retta oppgåve, slik at eg kjem ikkje til å gå djupare inn i teoretiske omgrep enn kva eg finn naudsynt for problemstillinga for oppgåva. Ei sentral målsetting i denne samanhengen vil være å utvikle/oppdage moglege verktøy til bruk i analysen av mine eigne datafunn. Dette siste poenget vil og være sentralt i reiegjeringa av den didaktiske kontrakten og omgrepa som er knytt til den. Om eg kan bruke to sett verktøy, utvikla frå såpass ulike ståstader på datasetta eg genererer, vil det etter mitt syn, bidra vesentleg til å styrke truverdet av funna eg kjem fram til. I det følgjande vil eg reiegjere både for grunnlaga, så vel som for sentrale hovudtrekk i begge desse pilarane.

Kapittel 2.2: Modellering i matematikk

Kapittel 2.2.1: Innleiande kommentarar

I læreplanen for matematikkfaget R2 finn vi følgjande to læreplanmål;

«modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensiallikning, løyse den og tolke resultatet»

«formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte»

Vidare har ein som ein av fire såkalla grunnleggjande ferdigheiter :

«Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk for realfag innebærer å bruke digitale verktøy til omfattende beregninger og visualisering. Det betyr å hente, bearbeide og presentere matematisk informasjon i elektronisk form. I tillegg vil det si å vurdere verktøyets hensiktsmessighet, muligheter og begrensninger.»

Læreplanen gjer ingen nærare forklaring eller definisjon på kva som vert lagt i formuleringa «modellere praktiske situasjoner». Dette kan tolkast som ein tildeling av ein viss metodefridom frå styresmaktene til den einskilde lærar i faget. Eit styrkande argument for dette synet er dei manglande føringane på kva slag digitale verktøy det vert forvente at elevane skal beherske.
At ein som lærar får innvilga ein slik metodefridom i undervisninga er i utgangspunktet å betrakte som ein stor fordel. Det kan likevel føre med seg enkelte problematiske aspekt.
Dei einskilde lærarane i faget vil ha ulik fagleg bakgrunn og ulik fagleg interesse. Det vil kunne medføre at lærarane vektlegg ressursane brukt på undervisninga om modellering forskjellig. Samtalar med røynde sensorar i faget, viser at det er sterke indikasjonar på at dette er ein reell utvikling.
Det er såleis på sin plass både å gje ein meiningsfull definisjon på omgrepa «modellere» og «matematisk modell»

Kapittel 2.2.2: Tidlegare forsking

Det har vore, og vert framleis, utført ein til dels omfattande forsking på modellering som metode. Eit søk i Oria med emneorda «mathematical modelling» i kombinasjon med «teaching» gir til dømes over 145 000 treff. Eg har såleis prøvd å avgrense søk etter tidlegare forsking til resultat omhandlande nivå tilsvararande den norske vidaregåande skulen, og då helst på eit nivå som tilsvarar full fordjuping innan faget.
På denne bakgrunnen kan det synast å være brei semje om at modellering som metode kan bidra positivt til elevane si læring av relevant fagkunnskap.
Til dømes seier Czocher at:

> *«In addition to applications and modeling tasks encouraging an appreciation of mathematics as a tool for solving real world problems (Carberry & Mckenna, 2014), there is growing evidence that applications and modeling can help students from elementary grades through engineering degree programs learn significant mathematical concepts and ideas”*
> (Czocher 2017, s78 - 79)

I tillegg framhevar m.a. Kjeldsen og Blomhøj kor stor rolle matematisk modellering spelar både for ulike forskingsgreiner og for ulike deler av næringslivet:

> *"Within the last 50 years the importance of mathematical models has been steadily increasing primarily in the natural sciences—physics, chemistry, geography, life sciences—but also in disciplines such as economics within the social sciences. Mathematical models and mathematical modeling play different roles in the different areas and problems in which they are used."*
> *(Kjeldsen og Blomhøj 2013, From the introduction.)*

Sjå og til dømes Ärlebäck, Doerr, & O'Neil, 2013; English, 2006; Lesh, Doerr, Carmona, & Hjalmarson, 2003; Mousoulides, Christou, & Sriraman, 2008.

Men forskinga viser og at elevane opplever det som utfordrande å overføre kunnskapane sine innan matematikk til praktiske samanhengar utanfor klasseromma.
Vidare viser det seg og at overføringa andre vegen frå det vi kan kalle kunnskap om den praktiske omverda til kunnskap innan matematikk er minst like utfordrande.
(Bassok, Wu, & Olseth, 1995; Britton, New,Sharma, & Yardley, 2005; Carraher and Schliemann, 2002; Nunes, Schliemann, & Carraher, 1985; Verschaffel, Greer, & de Corte, 2000).
Niss, Blum, & Galbraith, (2007) hevdar at ein årsak til at elevane opplever desse utfordringane er at ein i matematikkundervisninga har ein tendens til å fokusere på analytiske teknikkar og å ta sambandet mellom dei matematiske eigenskapane og parametrane på den eine sida og deira respektive betingelsar og forutsetningar på den andre sida, for gitt.
Dette vil være viktige moment for meg å ha i tankane i det vidare arbeidet med oppgåva og som eg vil kommen tilbake til i siste kapittel.

Kap 2.2.3: Normative og deskriptive modellar

Ein kan klassifisere modellar på ulike vis. Eit hovudskille kan settast mellom normative og deskriptive modellar. Dette er eit skilje vi kan spore tilbake til David Hume sin filosofi der han forfekta at det ikkje var råd å føre logiske bevis for moralske prinsipp og utsegner.
Skillet har tradisjonelt sett vore viktig for å avgrense vitskapane si rolle (snl.no/normativ)
Dette har sin årsak i at vitskapen si rolle heilt fram til førre århundret i all hovudsak har vore beskrivande. Til dette føremålet var det dei deskriptive tankesetta som var grunnlaget. Først

med utviklinga av vitskapane som omhandla menneskelege aktivitetar kom dei normative idèane til sin rett. I desse vitskapane er og var vurderingar og tilrådingar sentrale aspekt ved den vitskaplege aktiviteten.

Kap 2.2.3.1:Normative modellar

Ein normativ modell vil fortelje oss korleis ein ut i frå ein rasjonal argumentasjon «bør» handle. Døme på normative spørsmål kan være: Kva er god vurdering av ein elev? Kva er god undervisning? Korleis gå fram i situasjonar som vert oppfatta som vanskelege for elevane? Ein vil såleis ville måtte definere eit subjektivt referansenivå og ut i frå det definere korleis ein bør handle og korleis ein gitt problemstilling bør handsamast
Nettsida eGovPoliNet (http://195.251.218.39/egpn_platform/) er ei side som er støtta av EU-kommisjonen. Førmålet med sida definerer dei som:

> *“..focuses on generating interaction amongst experts from various scientific disciplines and practitioner groups in order to provide evidence and insight into the development of new methods of Governance and Policy Modelling” (http://195.251.218.39/egpn_platform/)*

Her definerer ein normativ modell som følgjer:

> *A normative model explains what is going on and what will happen in optimal conditions for a research object. This is a type of perspective model. Normative models allow to describe current roles and functions, understand the biases and develop new knowledge about further models.*

Universitetet for kunst og design i Helsinki tilbyr eit grunnleggjande kurs innan vitskapleg metode. I utgangspunktet kan det innvendast at fagfelt innan kunst og design ligg eit godt stykke unna matematikkdidaktikk, men då kursa er såpass grunnleggande at tankane dei gjev uttrykk for, i like stor grad er dekkande for alle fagområde der normativ modellering er aktuelt:

> *« When the object of study belongs to* ***empiria,*** *the tangible world of people, objects and events, the study is called "empirical" or "factual" as a contrast to* formal sciences *like mathematics and logic, which have no association to empiria. These latter deal with theory only, and they aim at clarifying its structures, i.e. the forms*

of thinking, such as the processes of logical or mathematical analysis. »
http://www2.uiah.fi/projects/metodi/144.htm

Og vidare:

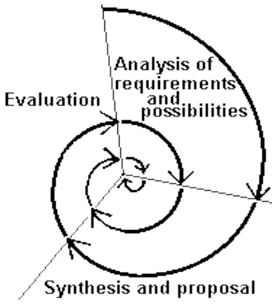
«If we now want to get a general view on the usual approaches and methods in the research of professions and artefacts, it is worthwhile first to observe that the conventional dichotomy between qualitative and quantitative approaches (the "two cultures of research") is here not fruitful. When the problem to be studied comes from practice, it will seldom consist of qualities or quantities only, but instead it will contain both, or more exactly it will contain aspects that the researcher can choose to register as he pleases, either as qualities or quantities.»
http://www2.uiah.fi/projects/metodi/144.htm

I bakgrunnsmaterialet for dette kurset har dei sett opp følgjande prinsippskisse for utviklinga av ein normativ modell:

Normal phases in the iterative "spiral of development" are as follows.

1. ***evaluative description** of the initial state (perhaps including its earlier development) and defining the need for improvements*
2. ***analysis** of relationships and possibilities to change things*
3. ***synthesis:** proposal for improvement (and its testing, in a project of development)*
4. ***evaluation** of the proposal or of the test.*

By repeating the sequence from 2 to 4, and by gradually improving the proposal, an acceptable result is usually found.
(http://www2.uiah.fi/projekti/metodi/144.htm#factual)



(http://www2.uiah.fi/projekti/metodi/144.htm#factual)

Ein normativ modell innan didaktikk tek med andre ord mål av seg til å sei noko om problemstillingar som ikkje med ein gong lar seg kvantifisere eller enkelt lar seg bryte ned i mindre komplekse delproblem. Ei målsetting vil være å kome fram til eit sett med ideelle kjørereglar for korleis ein skal handle i ein gitt situasjon eller i samband med ein gitt problemstilling.

Kap 2.2.3.2: Deskriptive modellar

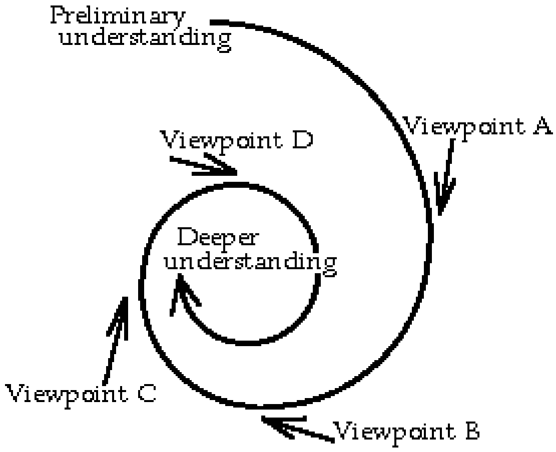
Ein deskriptiv modell beskriv korleis vi faktisk handlar. Den vil ha som målsetting å samle kunnskap om og rundt den aktuelle situasjonen utan at situasjonen vert påverka eller endra. Denne kunnskapen vil for det meste bestå i å beskrive situasjonen, men den kan og inkludere forklaringar på korleis situasjonen har oppstått og korleis den kjem til å utvikle seg vidare. Ein deskriptiv modell vil ikkje innehalde forslag til forbetringar eller inneha noko meining om eventuelle positive eller negative sider ved situasjonen.

Universitetet for kunst og design i Helsinki har og kome fram til ei prinsippskisse for utviklinga av ein deskriptiv modell:

> *Because you are studying an object that you do not know well, it will be impossible to plan all the phases of the investigation exactly. It can even be difficult to decide which facts are to be collected, and this becomes clear first after some data have been*

analyzed. You must be prepared to change your plans as soon as the investigation deepens your understanding of the issue. This type of method is often called iterative.

The process normally starts at studying the object from several different viewpoints, either from the angles of various established sciences (like in the diagram on the right) or just from miscellaneous practical points of view. Repeating the different vistas helps you to understand better the object, because the initial inspections can serve as a basis for later examinations. The process thus resembles a spiral which gets gradually closer the goal.



Sooner or later during the inspection you will be able to specify the most revealing points of view for your study and explain how you "understand" the object. Thereafter you will need to gather only such empirical data that are related to the problem; that will enable you to minimize the material you will have to analyse.

The iterative process is repeated as many times as necessary to reach a satisfactory result, or until the resources are exhausted.
(http://www2.uiah.fi/projekti/metodi/144.htm#factual)

Kapittel 2.2.4: Modellering i matematikk, teoretisk bakgrunn

I dette delkapittelet vil eg gå inn på det teoretiske grunnlaget til matematisk modellering som metode.

Kapittel 2.2.4.1:Utgangspunkt: hermeneutikk

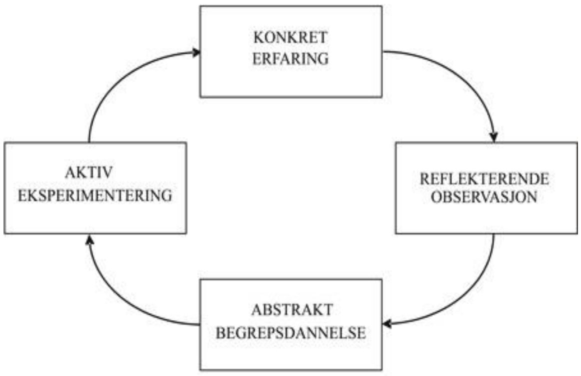
I følgje Karoline Svensli var hermeneutikk opphavleg eit omgrep for læra om tolking av tekstar. Hermeneutikk kan forståast som ein metode for å tolke handlingar, tekstar, kunstverk eller sosiale fenomen og vekselvirkningar mellom desse. (Svensli 2015)
Ein hermeneutisk tilnærming legg vekt på at det ikkje finnest ei endeleg sanning. Fullstendig objektivitet er med andre ord ikkje mogleg å oppnå. Det beste ein kan håpe på er ein gradvis tilnærming til denne. Tolkingar som vert gjort av et fenomen, vil alltid bære preg av kontekst

og tolkaren sin førforståing og tidlegare erfaring. Eit sentralt element innan hermeneutikk er den hermeneutiske sirkelen. Denne vart først formulert som ide av den tyske teologen og filosofen Friedrich D.E. Scheiermacher:

> *«Hermeneutisk utlegning definerer Schleiermacher som en bevegelse fram og tilbake mellom tekstens enkelte bestanddeler og den bredere historiske og psykologiske meningssammenheng som tekstens deler blir forståelige gjennom. Omvendt er det bare teksten som bevarer og fikserer dette språklige uttykket og gir oss tilgang til forfatterens historiske intensjon, Dette uendelige fram og tilbake mellom tekstens grammatiske deler og intensjonens psykologiske og åndelige helhet betegnet Schleeiermacher som en hermeneutisk sirkel»*
> *(Hermeneutisk lesebok, 2001 s 11)*

Vidare seier Svensli:

> *En grunntanke i hermeneutikk er altså at vi alltid forstår noe ut fra visse forutsetninger, og at mening skapes og kun kan forstås i en sammenheng eller kontekst.» (Svensli 2015)*



Den hermeneutiske sirkelen
(http://kunnskapssenteret.com/)

Desse tankane er sentrale i oppbygginga av ein matematisk modell. Å modellere ved hjelp av matematikk innebærer å bruke erfaringar og forkunnskapar til å gå ifrå det konkrete til det abstrakte. Deretter testar ein ved hjelp av eksperimentering om den resulterande abstraksjonen kan sei noko om det konkrete. Dei er og grunnleggande i pedagogiske forklaringsmodellar omhandlande fordelar og ulemper ved ulike didaktiske metodar.
Hermeneutikken er såleis eit fruktbart teoretisk utgangspunkt for modellering og dannar eit vel fundamentert grunnlag for vidare refleksjonar rundt temaet.

Kap 2.2.4.2:Modelleringskompetanse

Kanskje det mest sentrale omgrepet innan pedagogisk forsking idag er omgrepet «kompetanse». At det er så sentralt har ført med seg ein omfattande forsking rundt omgrepet som i sin tur har gitt opphav til ein rikhaldig litteratur omhandlande omgrepet.
Det ligg utanfor denne oppgåve sin problemstilling å gå i djupna på denne forskinga og eg vil såleis avgrense meg til nokre grunnleggande betraktningar.
Etymologien til ordet er frå fransk, opprinnleg fra latin ,og tyder 'sammentreff, skikkethet'. SNL definerer ordet som

> *« evne eller kvalifikasjoner, f.eks. til å uttale seg, inneha en stilling eller treffe en beslutning.» (https://snl.no/kompetanse)*

Dette er ein noko rudimentær definisjon som ikkje lar seg så lett anvende. Kunnskapsdepartementet nyttar seg av ein meir presis og såleis meir brukande definisjon:

> *«Kompetanse er å tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenking»*
>
> *(St.mld 20-2016:Fag-Fordypning-Forståelse)*

Dette er ein definisjon som på ein presis måte omfamnar sentrale bergrep innan modellering. Vidare vil vi ha som konsekvensar av denne definisjonen både at det eksisterer eitt vidt spekter av ulike kompetansar så vel som at det vil finnast ulike nivå av kompetanse innan eit fagområde.
Ein mykje nytta modell for å illustrere ei slik nivåinndeling av kompetansen er den s.k. «four states of competence». Dette var ein modell utvikla av amerikanaren Noel Buch ved Gordon Training International tidleg på 1970-talet. Det er hevda at ideen hadde sitt utspring i arbeida til Abraham Maslow, sjølv om han aldri publiserte noko om dette (http://examinedexistence.com/the-four-states-of-competence-explained/)

Tankegangen kan illustrerast med tabellen nedanfor:

	competence	incompetence
conscious	**3 - conscious competence** • the person achieves 'conscious competence' in a skill when they can perform it reliably at will • the person will need to concentrate and think in order to perform the skill • the person can perform the skill without assistance • the person will not reliably perform the skill unless thinking about it - the skill is not yet 'second nature' or 'automatic' • the person should be able to demonstrate the skill to another, but is unlikely to be able to teach it well to another person • the person should ideally continue to practise the new skill, and if appropriate commit to becoming 'unconsciously competent' at the new skill • **practise** is the singlemost effective way to move from stage 3 to 4	**2 - conscious incompetence** • the person becomes aware of the existence and relevance of the skill • the person is therefore also aware of their deficiency in this area, ideally by attempting or trying to use the skill • the person realises that by improving their skill or ability in this area their effectiveness will improve • ideally the person has a measure of the extent of their deficiency in the relevant skill, and a measure of what level of skill is required for their own competence • the person ideally makes a commitment to learn and practice the new skill, and to move to the 'conscious competence' stage
unconscious	**4 - unconscious competence** • the skill becomes so practised that it enters the unconscious parts of the brain - it becomes 'second nature' • common examples are driving, sports activities, typing, manual dexterity tasks, listening and communicating • it becomes possible for certain skills to be performed while doing something else, for example, knitting while reading a book • the person might now be able to teach others in the skill concerned, although after some time of being unconsciously competent the person might actually have difficulty in explaining exactly how they do it - the skill has become largely instinctual • this arguably gives rise to the need for long-standing unconscious competence to be checked periodically against new standards	**1 - unconscious incompetence** • the person is not aware of the existence or relevance of the skill area • the person is not aware that they have a particular deficiency in the area concerned • the person might deny the relevance or usefulness of the new skill • the person must become conscious of their incompetence before development of the new skill or learning can begin • the aim of the trainee or learner and the trainer or teacher is to move the person into the 'conscious competence' stage, by demonstrating the skill or ability and the benefit that it will bring to the person's effectiveness

(http://www.businessballs.com/consciouscompetencelearningmodel.htm)

Progresjonen er då frå rute 1 via rute 2 og 3 til rute 4. Det vil ifølgje modellen ikkje være råd å hoppe over nivå. Vidare vil det være fullt mogleg å falle ned på mindre avanserte nivå om ikkje ein held den oppnådde kompetansen ved like.Eg vil hevde at tankegangen illustrert her er sentral innan undervisning generelt og modellering spesielt. Den illustrerer korleis kompetansen hjå elevar utviklar seg ved ein vellykka gjennomføring av eit modellbasert undervisningsopplegg.

Kap 2.2.4.3: Modelleringsprosessen trinn for trinn

I følgje P. Eykchoff kan vi definere ein matematisk modell på følgjande vis *«a representation of the essential aspects of an existing system (or a system to be constructed) which presents knowledge of that system in usable form.”*

Eykchoff P: System identification: Parameter and state estemation.

J. Wiley Chichester 1974)

Det er to viktige didaktiske poeng å ta med seg frå denne definisjonen:

1) Det første poenget er at frasen *”essential aspects of an existing system (or a system to be constructed)”* innebærer at ein modell representerer ei idealisering av verkelegheita.

2) Dernest setninga *«…presents knowledge of that system in usable form.»* medføre at det å modellere innebere at ein gitt situasjonen vil verte beskreven ved hjelp av matematikk.

I tillegg til at kvar av desse poenga i seg sjølve vil representere ein utfordring i ein undervisningssituasjon, vil både overgangane mellom dei så vel som heilskapen rundt dei gje opphav til sine særskilde utfordringar.

Morten Blomhøj utvikla på tidleg 2000 talet, saman med andre, ein teoritisk tilnærming til modellering som han har brukt i fleire artiklar omhandlande tematikken rundt modellering sidan. (Blomhøj et.al. 2003, 2006, 2011, 2013)

I artikkelen: «Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning» (2003) utdjupar dei dette. Her gir dei ein skildring av eit modellbasert undervisningsopplegg på universitetsnivå på ein didaktisk bakgrunn. Sjølv om bakgrunnen for artikkelen er ein annan enn mi studie, er både dei teoretiske betraktningane så vel som resultata relevante. Dette vil eg hevde på bakgrunn av at den generelle karakteren både den teoretiske bakgrunnen og funn deira innehar.

Dei definerte her omgrepet modelleringskompetanse som:

«By mathematical modelling competence we mean being able to autonomously and insightfully carry through all aspects of a mathematical modelling process in a certain context» (Blomhøj & Jensen 2003)

Vidare var det ein hovudtanke er å dele den matematiske modelleringsprosessen inn i 6 trinn:

(*a*) *Formulation of a task (more or less explicit) that guides you to identify the characteristics of the perceived reality that is to be modelled.*

(b) Selection of the relevant objects, relations etc. from the resulting domain of inquiry, and idealisation of these in order to make possible a mathematical representation.

(c) Translation of these objects and relations from their initial mode of appearance to mathematics.

(d) Use of mathematical methods to achieve mathematical results and conclusions.

(e) Interpretation of these as results and conclusions regarding the initiating domain of inquiry.

(f) Evaluation of the validity of the model by comparison with observed or predicted data or with theoretically based knowledge.

(Blomhøj, Jensen 2003)

Kvar av desse trinna representerer ein overgang mellom ulike nivå i modelleringsprosessen. figuren under illustrerer tankegangen.

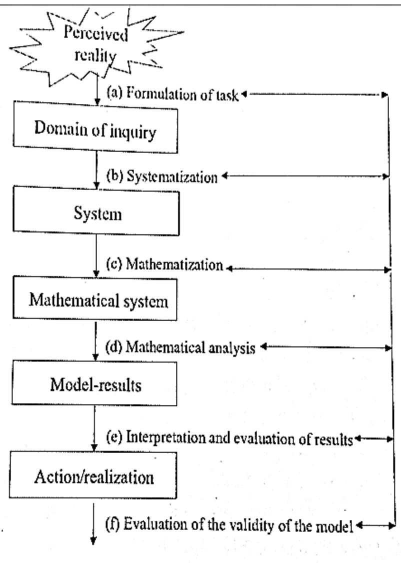


Fig 2. A graphic model of a mathematical modelling process. (Blomhøj & Jensen, 2003)

I begrepet "perceived reality" , av meg oversett til «oppfatta verkelegheit», legg forfattarane ei samla før-forståing av omverda. Generelt sett vil dette være effekten av all tidlegare erfaring og kunnskap som elevane har om eit aktuelt tema.

Trinn a) fører oss over til det s.k. «domain of inquiry». Dette kan oversettast med «det undersøkande nivået». Her vil elevane reflektere rundt den spesifikke prosessen som skal modellerast. Spørsmåla vil dreie seg rundt tema som kva konkrete storleikar inngår, kva karakteriserer det spesielle fenomenet osv.

Trinn b) fører til det systematiserande nivået (mi oversetting). Her vil elevane begynne å systematisere og spisse tankane inn mot matematiseringsprosessen. Ein vil ha klart for seg kva fysiske lovar som er aktuelle og såleis vil prosessen på dette nivået munne ut i ein begynnande matematisering av den konkrete situasjonen.
Neste nivå som vi når v.h.a. trinn c), er det forfattarane kallar «mathematical system», av meg oversett til det matematiserte nivået. Dette vil representere det første utkastet til ein matematiske modell. Elevane kan risikere å oppleve at resultatet frå det førre nivået resulterte i ein modell som ikkje lar seg bruke. Dette kan være fordi det matematiske nivået vert for høgt eller fordi programvara ikkje er kompatibel. Modellen er framleis uprøvd, men no er overføringa av konkret situasjon til matematikk i utgangspunktet gjennomført.
Trinn d) løftar oss opp på «det konkluderande nivået», nivået som gir oss resultata frå modellen. Her vil ein analysere modellen og ein vil få dei første konkrete resultata.
Det siste nivået, av meg kalla refleksjonsnivået, når ein via trinn e). Her vil modellen verte utprøvd. Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2011) gjengav følgjande moment ein slik refleksjon kunne innehalde:

> *"In the construction of a mathematical model, many decisions (consciously as well as unconsciously) are taken in the modeling process, such as: What are the fundamental characteristics, the key features, of the phenomenon or problem complex that one wants to model? What boundaries have been drawn? What has been left out of the model? Which simplifying assumptions have led to idealizations and delimitations in the process? This kind of question applies to every mathematical modeling process, regardless of the intended application(s) of the model. The decisions which are made are not always made explicit, and they are not always questioned. For students' to develop modeling competency regarding the validity of a model, they need to be aware of the existence of such (implicit) decisions and to reflect critically about them."*

Denne formen for refleksjonar kalla dei "interne refleksjonar".
Trinn f) vil til slutt bestå av ein utprøving av gyldigheitsområdet til modellen.
I utgangspunktet vil modelleringa følgje trinna skissert ovanfor suksessivt, men i praksis vil ein som regel måtte gå ikkje berre fram og tilbake mellom to etterfølgjande trinn; ein kan og oppleve å måtte gå mellom alle trinna i prosessen. I tillegg vil ein ofte måtte gjere dette fleire gonger.
Både i kapittel 2.3 og i kapittelet omhandlande analysen av funna frå forsøket, vil eg komme

tilbake til momenta nemt ovanfor. Spesielt den trinnvise inndelinga av modelleringsprosessen vil stå som eit sentralt punkt.

Kap 2.2.4.4: Utfordingar ved modellering som metode

Ein presisering først: Med omgrepet «tradisjonelle metodar» vil det i det følgjande meinast eitt tavlebasert undervisningsopplegg, der læraren kombinerer førelesning og ein faglig dialog med elevane med eit avgrensa tal økter med oppgåveløysing.
Vidare vil det, om ikkje anna er nemt, med omgrepa undervisningsmetodar og undervisningsopplegg refererast til metodar og opplegg baserte på modellering.
I artikkelen «Doing With Understanding: Lessons From Research on Problem and Project-Based Learning» (Barron et al 1998) poengterer dei hovudutfordringa ein møter ved å undervisningsopplegg av den arten eg gjennomførte:

> *«A major hurdle in implementing project-based curricula is that they require simultaneous changes in curriculum, instruction, and assessment practices -changes that are often foreign to the students as well as the teachers.» » (Barron et al 1998)*

Mange av utfordringane nemnt i det følgjande vil kunne være høgst reelle ved bruk av andre undervisningsmetodar. Forskjellane vil ligge i kor stor rolle dei forskjellige utfordringane vil ha i eit gitt undervisningsopplegg. Utfordringane nemnde kan formulerast på ulike vis, og det kan med stor sikkerheit formulerast andre utfordringar i tillegg. Det er likevel min påstand at desse er mellom dei mest sentrale. Eg har vald å dele utfordringane knytt til undervisningsopplegg basert på modellering, i to hovudtypar. Desse har eg kalla kontekstuelle utfordringar og konseptuelle utfordringar:

I) Kontekstuelle utfordringar vil inkludere alle utfordringar som skuldast ytre faktorar rundt elevane. Dette inkluderer både elevane som gruppe og elevane som einskilde individ.

II) Konseptuelle utfordringar vil være dei personlige utfordringane kvar einskild elev møter.

Kap 2.2.4.4.1:Kontekstuelle utfordringar

i. Rammevilkår

Med rammevilkår vert her meint både dei naudsynte rekvisittane til forsøka så vel som tilgang og kjennskap til relevant programvare. Samanlikna med tradisjonelle metodar, vil et undervisningsopplegg basert på modellering være meir avhengig av at desse er på plass. Dette er fordi eitt tradisjonelt opplegg har ein innebygd naturlig fleksibilitet som lett kan fange opp og tilpassast manglar ved rammene. Denne utfordringa kan vi knytte til desse punkta hjå Blomhøj og Jensen (Blomhøj & Jensen 2003):

d) Use of mathematical methods to achieve mathematical results and conclusions, og

e) Interpretation of these as results and conclusions regarding the initiating domain of inquiry.

Desse punkta framstår som er særskild sårbart for mangelfulle rammevilkår.
Dette er fordi at dei matematiske metodane det vert referert til vil i svært stor grad basere seg på bruk av IKT. Dette gjeld både i sjølve utviklinga av modellane og når ein skal tolke og kontrollere resultat.

ii. Faglig utbytte i forhold til tidsbruk

Kanskje den største utfordringa i undervisninga i matematikk i den vidaregåande skolen er tidspresset. Dette gjelder i særlig grad på studiespesialiserande studieretning. Med sentralt gitte eksamenar og svært omfattande pensa, opplever både elevar og lærarar eitt til dels formidabelt press for å rekkje gjennom pensum i løpet av den disponible tida. Det er derfor av heilt avgjerande betyding at all undervisning må ha høg faglig intensitet som hovudmål. Eitt opplegg basert på modellering vil av natur ikkje være så intenst som eitt tradisjonelt opplegg. Dette fordi at over eitt gitt tidsrom vil vi med det tradisjonelle opplegget kunne dekkje større delar av pensum enn med eit opplegg basert på modellering. Dette gjer ikkje nødvendigvis det tradisjonelle opplegget betre i den forstand at læringsutbyttet til elevane er høgare. Det vil finnast gode argument for at det omvendte kan være tilfelle. Problemet er at i ein undervisningssituasjon som er såpass styrt av eksamen, må effektivitet være det viktigaste kriteriet når undervisninga skal planleggast. Å bevege seg frå ein tilstand av ubevisst inkompetanse til eit nivå med bevisst kompetanse vil ta for lang tid i ein samanheng knytt til modellering. Det vil være for mange ulike kompetansar som må utviklast samtidig til at ein vil kunne tileigne seg like stor del av pensumet som ein vil kunne klare ved tradisjonell undervisning.

iii. Krev disiplinerte elevar

Under arbeidet med å utvikle en matematisk modell vil det bli stilt vesentlig strengare krav til arbeidsdisiplinen til elevane. Dette vil være både fordi undervisningssituasjonen inneberer ein betydelig auka grad av sjølvstende samanlikna med det dei vil være vane med, og fordi det vil stille større krav til at dei relevante forkunnskapane er bevisstgjorte. Begge disse momenta vil i ein tradisjonell undervisningssituasjon mykje lettare kunne oppdagast og hurtigare kunne gripast fatt i.

Kap 2.2.4.4.2: Konseptuelle utfordringar

iv. Uvant arbeidsmetode

For langt dei fleste elevar vil arbeidet med å utvikle matematiske modellar være ein svært uvanlig måte å tileigne seg lærestoffet på. I nesten all undervisning i norsk skule blir elevane si evne til kritisk refleksjon rundt faget og elevane si faglige sjølvstende sterkt underkommunisert. Det er fleire grunner til dette. Ein av dei viktigaste i vidaregåande skule vil være det tidlegare nemnte tidspresset dei sentralt gitte eksamenane medfører. Uansett grunn er resultatet at elevane generelt er for lite fagleg sjølvstendige. I dette legg eg at elevane er gjennom stort sett hele skulegangen trent i at læraren har alle svar klare, og med ein gong eitt problem oppstår er det berre å spørje læraren. Dette medfører at alle undervisningsopplegg som fordrar sjølvstende hos elevane, ofte vil stoppe opp så snart elevane møter problem dei ikkje umiddelbart ser løysningane på.
Alle dei tre først punkta til Blomhøj og Jensen har som føresetnad at elevane er i stand til ein sjølvstendig refleksjon rundt den aktuelle problemstillinga. Om denne ikkje er til stades, vil resultatet gjerne være at der vi lærarar gjerne ønskjer at elevane grublar, reflekterer og resonnerer seg fram til løysningar, endar elevane ofte opp med umiddelbart å rekkje opp hendene for å få hjelp eller vert sittande passivt og vente på at læraren skal oppdage at dei har eitt problem.

v. Manglande forkunnskap

Om ikkje dei naudsynte forkunnskapane er på plass, vil alle punkta i modelleringsprosessen skissert av Blomhøj og Jensen vanskeleg la seg gjennomføre.

Spesielt punktet c), *translation of these objects and relations from their initial mode of appearance to mathematics,* vil være særskilt utfordrande. Eit anna moment er at undervisning basert på utvikling av modellar vil, som eg har vore inne på tidlegare, krevje sjølvstendige elevar. Denne sjølvstendigheita vil stille strengare krav til elevane sine

forkunnskapar enn det dei vil være vane med. Gjennom hele utviklinga av modellen vil det vil være mindre detaljstyring frå læraren enn ved tradisjonell undervisning. Dette er ei medviten haldning frå læraren og ikkje, som ein lett kan tru, eitt resultat av at læraren ikkje har kapasitet til detaljert å styre undervisninga. For at elevene skal oppleve ein progresjon under arbeidet med modellen, må dei være så faglig trygge at dei på sjølvstendig grunnlag kan bruke matematikken på uvante måtar og i uvante situasjonar. Dei vil ikkje lenger kunne stole på at innøvde løysningsalgoritmar hjelper dei. Skal elevane klare å ta steget opp til bevisst kompetanse, og i nokre tilfelle til ubevisst kompetanse, vil gode forkunnskaper være viktigare enn dei vil være i meir tradisjonelle undervisningssituasjonar.
For læraren sin planlegging har dette to konsekvensar:

I) Han må forsikre seg om at så stor del av elevane som mogleg har tilegna seg tilstrekkelige og relevante forkunnskapar.

II) Han må være sikker på at han ikkje overvurderer det faglige nivået til elevene når problemstillingane som skal modellerast vert utvikla.

<u>vi. Vanskeleg å innføre heilt nye konsept</u>

Morten Blomhøj og Tinne Hoff Kjeldsen påpeikte i artikkelen sin «Teaching mathematical modelling through project work», (Blomhøj & Kjeldsen 2006), er det vanskeleg å innføre heilt nye omgrep ved hjelp av matematisk modellering. Metoden har som formål å beskrive eit fenomen med matematikk.
Når ein skal innføre ny matematikk vil det alltid være ein del basiskunnskap som må lærast først. Dette involverer at grunnleggande teknikkar og metodar må automatisertast, noko som oftast skjer gjennom løysing av basale treningsoppgåver. Ein kan sjølvsagt tenkje andre måtar å gjere dette på; gruppearbeid, prøve og feile med digitale hjelpemiddel til dømes.
Poenget er at fokuset må være på å innarbeide basale ferdigheiter slik Blomhøj og Kjeldsen er inne på. (Blomhøj & Kjeldsen 2006). Det vil fort verte for utfordrande for elevene å prøve å tileigne seg nye matematiske omgrep samtidig som dei skal oppdage og knytte samanhengar mellom matematikken og det praktiske fenomenet som skal modellerast.
Å utvikle sjølv enkle matematiske modeller vil såleis ofte være ein altfor krevjande utfordring til at elevane er i stand til å halde det nødvendige fokuset på oppgåva.
Ifølgje Blomhøj & Kjeldsen og Blomhøj fungerer metoden derimot bra til å konsolidere kjent kunnskap. (Blomhøj & Kjeldsen 2006)

vii. Matematisk utfordrande

Å gjennomføre eit vellykka modelleringsforsøk vil ofte krevje at elevane nyttar matematikk frå ulike deler av pensum. Til dømes vil eit opplegg basert på eksponentiell vekst gjerne krevje at dei kan løyse ekspontielle likningar, at dei kan nytte reknereglane for bruk av logaritmar og at dei kan nytte ulike representasjonar av den eksponentialfunksjonen. Elevane må såleis ha ein god oversikt over dei relevante delane av pensum. Dette vil representere ein høg grad av måloppnåing i høve til læreplanmåla. I tillegg må dei både være i stand til å omsette situasjonen som skal modellerast til matematikk og å tolke resultata frå den ferdige modellen.

Kapittel 2.3: Ein kort overgang

Som nemt i innleiinga av dette kapittelet, var eit av hovudmålsettingane med dette kapittelet å utvikle verktøy eg kunne bruke i analysedelen av oppgåva. Den trinnvise inndelinga av modelleringsprosessen gjort reie for i kapittel 2.2.4.3 vil i tillegg til å representere eit fundament for modellering som undervisningsmetode, og fungere som eit analyseverktøy/forklaringsmodell av det slaget eg ettersøkjer. Inndelinga i 5 trinn gjer at det vil være eit svært brukarvennleg verktøy, samstundes som mangelen på avgrensingar gjer det til eit robust verktøy i den forstand at det tek høgde for at sjølv godt planlagde undervisningsopplegg kan fungere suboptimalt i praksis. Det er likevel to svakheiter:
For det første kan fundamentet hjå Blomhøj kritiserast for å være meir av ein praktisk karakter enn ein fundamental teoretisk karakter.
For det andre trekk fleire forskarar (Lerman, 2006 og Lester, 2005 til dømes) fram at matematisk modellering manglar eit reelt teoretisk fundament.
Kaiser et.al seier at:

> *«Mathematics education research has been somewhat short of its own paradigmatic theories (see ZDM, 2005, issue 6 and ZDM 2006, issue 1 for an ongoing discussion). Theories are often borrowed from the background sciences and applied to the field of mathematics education e.g. general learning theories from pedagogy, sociology, psychology etc.*
>
> *(*Kaiser et.al 2006)

Og vidare:

> *«It is an open discussion to what degree we actually have a theory for teaching and*

learning mathematical modelling and indeed this discussion depends on which notion of theory we are using."

(Kaiser et.al 2006)

Det kan såleis synast naudsynt for denne delen av oppgåva å ha eit bein til å stå på for å skape eit solid teoretisk fundament. Dette bør være av ein meir teoretisk karakter samstundes som det har eit potensiale i seg til å munne ut i eit supplementerande analyseverktøy.

I kapittel 1 vart det nemt Brousseau og hans tanke om den didaktiske kontrakten. Denne tanken, saman med den meir generelle tanken om den didaktiske situasjonen utgjer eitt breitt teoretisk fundament. Vidare kan den og nyttast til å utvikle eit effektivt analyseverktøy på eit vidt spekter av undervisningsopplegg. Dett vil mellom anna inkludere modellbaserte undervisningsopplegg. Brousseau sine tankar vil difor være tema for det neste delkapittelet og svært sentrale i den seinare analysen av funna frå elevforsøket..

Kapittel 2.4: Den didaktiske situasjonen

Kapittel 2.4.1: Innleiing

Eit av dei sikraste teikna på at læring har førekomme i ein undervisningssituasjon er at elevane har utvikla ei evne til å løyse nye problem som ikkje nødvendigvis er av same art som dei har møtt tidlegare. Dette vil gjerne være problem som krev ei viss grad av nytenking og oppløysing av kjende løysingsalgoritmar. Det vil med andre ord kreve av elevane at dei har utvikla ei evne til å være oppfinnsame. I kva grad denne evna er oppnådd vil være eit sentralt spørsmål i alle vurderingssituasjonar elevane kjem til å gjennomgå.

Som lærar vil ein ikkje direkte kunne lære elevane denne evna. Ein kan etterspørre den, forklare dei strategiar for å utvikle evna og oppmuntre elevane til å prøve å utvikle den. Dette er det Guy Brousseau kallar det didaktiske paradokset, og som han prøvde å modellere i utviklinga av omgrepet den didaktiske kontrakten. Omgrepet dreier seg om reglane for samhandlingane i ein matematisk undervisningssituasjon. Det vart introdusert av Broussseau i 1978 i eit forsøk på å forklare ein spesifikk svikt i matematikkundervisninga; at elevane svarar på oppgåver slik dei trur læraren vil dei skal svare og ikkje slik den gitte oppgåva la opp til. Omgrepet vart seinare brukt som ein del av det teoretiske fundamentet for det Brousseau kalla didaktiske situasjonar. I løpet av 84-85 vidareutvikla han tankane til eit komplett teoretisk rammeverk rundt læringsprosessen, kalla «Teorien om didaktiske situasjonar». Den didaktiske kontrakten vart no definert til å være ein av to delar av den didaktiske situasjonen:

« A didactical situation involves two features:

1) the adidactical situation

2) the didactical contract (G.Manno 2006)

Den adidaktiske situasjonen omhandlar læringsprosessen hjå den enkelte elev, medan den didaktiske kontrakten omhandlar samspela lærar - elev og elev – elev. Boka «Theory of Didactical Situations in Mathematics : Didactique des mathématiques, 1970-1990» er ein antologi, der fleire sentrale verk av Brousseau er omsett til engelsk. Boka vart gjeven ut med tanke på at mange av arbeida til Brousseau berre var gitt ut på fransk og såleis lite tilgjengelege for mange interesserte. Eg vil i det følgjande gå inn på dei to sentrale omgrepa «adidaktiske situasjonar» og «didaktiske kontraktar» med utgangspunkt i Brousseau sine arbeid.

Kapittel 2.4.2: Bakgrunn

Det er grunn til å hevde at to sentrale grunnpilarar i arbeida til Brousseau er den sokratiske metoden og Piaget sin læringsteori. Han seier mellom anna at

> *«The Socratic framework can be improved if we assume that the student is able to draw her knowledge from her own experiences, by her own interactions with her milieu, even if this milieu is not organized with learning in mind. The student learns by looking at the world (empiricist-sensualist hypothesis) or by making hypotheses or the kind her experience lets her choose (a-priorist hypothesis) or in a more complex interaction consisting of assimilation and accommodation such as described by Piaget.*
>
> *(Theory of Didactical Situations in Mathematics s 31)*

Det kan såleis være fruktbart å gje ein kort oversikt over desse to utgangspunkta og sjå på korleis dei er knytte opp mot Brousseau sine tankar. Det vil ligge utanfor denne oppgåva si målsetting å gå djupt inn i tankane bak. Utgreiinga vil difor konsentrere seg om å forklare dei mest sentrale og naudsynte omgrepa som er relevante for denne oppgåva.

Kapittel 2.4.2.1: Den sokratiske metoden

Professor i statsvitenskap ved Colorado State University, Robert Reich, omtala i 2003 den sokratiske metoden på følgjande vis:

> *" The Socratic Method involves a shared dialogue between teacher and students. The teacher leads by posing thought-provoking questions. Students actively engage by asking questions of their own. The discussion goes back and forth.*
>
> *The Socratic Method says Reich, "is better used to demonstrate complexity, difficulty, and uncertainty than to elicit facts about the world." The aim of the questioning is to probe the underlying beliefs upon which each participant's statements, arguments and assumptions are built.*
>
> *The classroom environment is characterized by "productive discomfort," not intimidation. The Socratic professor does not have all the answers and is not merely "testing" the students. The questioning proceeds open-ended with no pre-determined goal."*
>
> *The focus is not on the participants' statements but on the value system that underpins their beliefs, actions, and decisions. For this reason, any successful challenge to this system comes with high stakes—one might have to examine and change one's life, but, Socrates is famous for saying, "the unexamined life is not worth living." (http://teaching.colostate.edu/tips/tip.cfm?tipid=53)*

Målet med den sokratiske metoden er å bevisstgjere eleven på latente idear han har om eit gitt tema. Det sentrale verktøyet for å oppnå dette er samtalen der læraren stiller spørsmål som krev genererande svar. I dette legg eg at læraren må stille spørsmål til elevane på eit vis som får dei til å reflektere over korleis dei rasjonaliserer og responderer på gitte tema. Det vil være viktig at læraren på førehand gjer det klart at spørsmåla ikkje er meint å være del av ein vurderingssituasjon, men at dei er eit hjelpemiddel for at elevane skal tileigne seg ny og djup forståing av det gitte temaet. Vidare må elevane verte bevisstgjorde på si rolle i ein sokratisk diskusjon og at den inneberer eit individuelt ansvar hjå kvar enkelt av dei.

Svara er ikkje meint å være eit mål i seg sjølv, men snarare eit utgangspunkt for vidare analyse og undersøkingar. Ein sokratisk undervisningssituasjon skal engasjere elevane i dialogar og diskusjonar som er prega av samarbeid og opne sinn. Dette i motsetning til debattar som ofte er prega av konkurranse og som ofte er individualiserte. Læraren bruker spørsmåla til å styre diskusjonane rundt spesifikke læringsmål. Ein god sokratisk diskusjon krev at læraren stiller spørsmål som oppfyller følgjande krav:

a) keep the discussion focused
b) keep the discussion intellectually responsible
c) stimulate the discussion with probing questions
d) periodically summarize what has and what has not been dealt with and/or resolved
e) draw as many students as possible into the discussion.
(Paul, R. and Elder, L. (April 1997). Foundation For Critical Thinking)

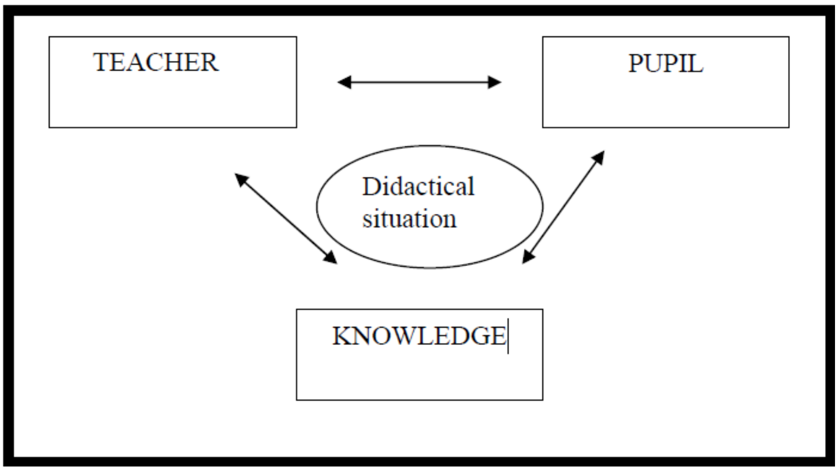
Eit heilt sentralt aspekt ved den sokratiske metoden er den anerkjenner at all ny kunnskap og forståing heng saman med tidlegare kunnskap og forståing, at tanken i seg sjølv er ein samanhengane prosess og ikkje isolerte samlingar av spørsmål og svar. Som vi skal sjå i Kap 2.4.3.1, er dette tankar som er nært slekta tankane Brousseau gjorde seg rundt den adidaktiske situasjonen.

Kapittel 2.4.2.2: Piaget sin læringsteori

Med sin bakgrunn som biolog, var Piaget, i følgje Huitt, & Hummel, svært interessert i korleis menneske tilpassar seg miljøet omkring. (Huitt, & Hummel 2003) Oppførsel, som han såg på som tilpassing til miljøet, er styrt av det han kalla «skjema». Desse er å betrakte som kognitive konstruksjonar som individet bruker til å skape representasjonar av omverda samt reaksjonar på denne. I følgje Piaget vil då eit individ prøve å skape ei likevekt mellom omverda og dei kognitive skjema. Han snakkar vidare om to prosessar individet bruker i forsøka på å oppnå denne likevekta: assimilering og akkomodering. Begge prosessane vert brukt gjennom livsløpet til ein person ettersom personen tilpassar seg miljøet på ein stadig meir kompleks måte. Assimilering er prosessen der personen omformar eller bruker miljøet slik at det kan plasserast i allereie eksisterande kognitive strukturar. Erfaringa av at eksisterande skjema ikkje lenger er tilstrekkelege, fører med seg ein s.k. kognitiv ubalanse. Dette er tilstanden mellom assimilering og akkomodering og vil være perioden der den kognitive utviklinga føregår. Piaget meinte at denne utviklinga ikkje var ein jamn prosess, snarare vil den føregå i rykk og napp. Likevekt oppstår når ein person sine skjema kan handsame det meste av den ny informasjon gjennom assimilering, medan ein tilstand av ubalanse oppstår når ny informasjon ikkje lenger kan tilpassast eksisterande skjema. Denne tilstanden kan lett opplevast som frustrerande. Søket mot ny likevekt er såleis den drivande krafta i læringsprosessen og mot ein mestring av den nye utfordringa. Det er denne meistringa som vert kalla akkomodering. Då vil kognitive skjema verte endra i samband med at ein må akseptere noko frå miljøet. Prosessane kan føregå samstundes eller enkeltvis. Straks nye skjema er konstruerte og tilpassa den nye informasjonen, vil assimileringsprosessen forsette med desse nye skjemaene fram til neste møte med inkommensurabel informasjon. Ettersom skjemaene vert meir kompliserte, dvs at dei omfattar meir kompleks oppførsel, vert dei kalla strukturar. Ettersom strukturane vert stadig meir kompliserte, vert dei organisert i eit hierarkisk system, som til dømes frå generelt til spesielt. Eit døme på assimilering vil være når ein matematikkelev nyttar ein kjend løysingsalgoritme på ei oppgåve som t.d. abc-formelen til å løyse ei tekstoppgåve der løysing av andregradslikningar inngår. Døme på akkomodering vil være når ein innfører heilt nye matematiske omgrep som vektorar.

Kapittel 2.4.3: Didaktiske situasjonar

Ein didaktisk situasjon er i utgangspunktet ein situasjon organisert på ein slik måte at læring kan føregå. Omstenda rundt ein vellykka didaktisk situasjon er knytt saman på eit vis som både er naudsynt, koherent, reproduserbar og spesifikk til den gitte kunnskapen ein som lærar vil formidle. Med utgangspunkt i det sokratiske rammeverket, hevdar Brousseau i teorien om didaktiske situasjonar at kunnskap er ein eigenskap til eit system beståande av eit subjekt og miljøet rundt som vekselvirkar med kvarandre.



(G.Manno 2006)

Det såkalla «lærar-elev-kunnskap-triangelet»

Læring skjer gjennom denne interaksjonen: Ein elev handlar innanfor eit gitt miljø på bakgrunn av sine eigne erfaringar og opplever på denne bakgrunnen reaksjonar frå miljøet. Denne læringseffekten, hevdar Brousseau, vil være til stades sjølv om det omkringliggande miljøet ikkje er organisert med tanke på at læring skal føregå. Læringa oppstår ved at eleven tilpassar seg eit miljø som genererer motsetningar, vanskar og instabilitetar. Kunnskapen som oppstår som resultat av denne tilpassinga vil manifestere seg som nye responsar til dei gitte situasjonane. Dette er heilt i tråd med Piaget sine tankar om assimilering og akkomodering, der tidlegare assimilerte erfaringar vert akkommoderte gjennom interaksjonar med miljøet rundt eleven. Han peikar likevel på at ein dogmatisk tilnærming med eit slikt utgangspunkt ikkje er å tilrå. Ein står då i fare for at ein «*takes the risk of relieving the teacher of all didactical responsibility*».

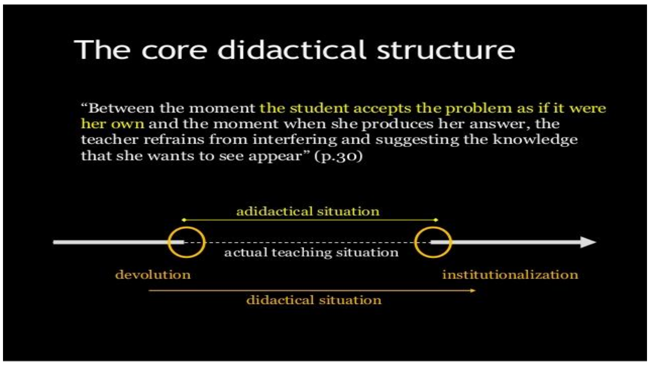
(Theory of Didactical Situations in Mathematics s 29)

<u>Kapittel 2.4.3.1: Adidaktiske situasjonar</u>

Brousseau meiner at for å skape ein læringsprosess må læraren provosere fram den forventa tilpassinga gjennom velgrunna val av problemstillingar han framset ovanfor elevane. Problemstillingane må veljast på ein slik måte at elevane kan akseptere dei som sine eigne. Dei må få elevane til å handle, tale og tenkje ut i frå sin eigen motivasjon. Elevane er kjende med at målsettinga for problemstillinga er ein ny kunnskap som vil oppstå hjå dei. Vidare må elevane ha ein form for kjennskap til at denne kunnskapen har sin bakgrunn i den interne situasjonen problemstillinga gir opphav til og at dei kan konstruere denne kunnskapen utan å ta i bruk noko form for didaktiske resonnement. I dette siste momentet legg Brousseau at:

> *«Meaning is not given by a text/discourse, but emerges from the activity which is requried for this knowledge» (Theory of Didactical Situations in Mathematics s 21)*

Mellom augeblikket eleven aksepterer problemstillinga som si eiga og augeblikket eleven produserer svaret sitt, avstår læraren frå å interferere eller å føreslå vegar til løysinga.
Denne situasjonen er det Brousseau kallar den <u>adidaktiske situasjonen</u>.



(http://www.slideshare.net/TheoRifortel/theory-of-didactical-situations**)**

Det er i den adidaktiske situasjonen at sjølve læringa føregår. Effektiviteten til den adidaktiske situasjonen har sin bakgrunn i at det er elevane sjølve som har ansvaret for å fordjupe seg i problemstillinga, og at læraren delegerer dette ansvaret til elevane:

> *«..students are put in a context of free and rich interaction, where they decide whether to share or not to share information, questions, learning methods etc.. Teachers are so involved into an interaction-play with students and their incoming problems.»*
> *(Theory of Didactical Situations in Mathematics s 30)*

Vidare delte Brousseau den adidaktiske situasjonen inn i fem delsituasjonar. Desse oppsummerer Manno på følgjande vis:

> *1) The act of devolution. The effectiveness of the a-didactical situation is in the fact that students have the responsibility to get into the problem, whatever it is, and teachers give them this responsibility.*
>
> *2) Action situation: an action situation is into the environment and makes easy to build implicit theories that work as proto-mathematical models.*
>
> *3) Formulation situations: it makes easy to gain new explicit languages and models, if its social shape is explicit then we talk about communication situation.*
>
> *4) Validation situation: students are required to solve problems and they make clear and fully explanations about theories and any means they have used to solve the problem.*
>
> *5) Institutionalisation situation: this situation gives value of truth to knowledge learnt in a classroom; it is usually related to concepts, symbols and knowledge likely to be used at different times and to different purposes. These situations go together with the act of "devolution"; the institutionalisation of knowledge is basically a process that allows students changing their previous knowledge into a new official knowledge thanks to the approval of the teacher that gives them a value of truth and makes possible to use the acquired new knowledge to solve future problems (knowledge and transfer capability).*
>
> *(Manno 2006 s25)*

Det er underforstått at elevane kan ikkje løyse alle adidaktiske situasjonar med det same. Det vil såleis være læraren si oppgåve å konstruere ein situasjon elevane har føresetnad for å løyse:

> *But the student cannot solve any adidactical situation immediately; the teacher contrives one which the student can handle. These adidactical situations arranged with didactical purpose determine the knowledge taught at a given moment and the particular meaning that this knowledge is going to have because of the restrictions and deformations thus brought to the fundamental situation. This situation or problem chosen by the teacher is an essential part of the broader situation in which the teacher seeks to devolve to the student an adidactical situation which provides her with the most independent and most fruitful interaction possible. For this purpose, according to the case, the teacher either communicates or refrains from communicating information, questions, teaching methods, heuristics, etc. She is thus involved in a game with the system of interaction of the student with the problems she gives her. This game, or broader situation, is the didactical situation.*
> *(Theory of Didactical Situations in Mathematics s31)*

Undervisning er såleis i følgje Brousseau ein prosess der læraren prøver å skape passande adidaktiske situasjonar hjå elevane og læring vil være elevane si tilpassing til denne situasjonen. Eit spørsmål som då tvingar seg fram er: Korleis skaper vi ein adidaktisk situasjon? Manno føreslår følgjande prosedyre:

> *1) Students have to find themselves into a situation where they are not sure of what strategy is the best to use, they can start using a known procedure, but this is not what the teacher wants them to learn.*
>
> *2) This procedure has to show its ineffectiveness, so that the student can come to a new winning strategy, modifying his knowledge. It actually exists an environment where the student can deny and accept a strategy also thanks to a kind of feedback. A feedback is a correction, an acceptance or a denial of different solutions with the goal of finding the winning strategy in a set of possible strategies. This is an a-didactical environment.*
>
> *3) The situation has to be repeatable; it is teacher's job to prepare an a-priori*

analysis considering all the possible strategies that students might use, which allows a quantity and statistical analysis. (Manno 2006 s 26)

For at denne framgangsmåten skal være vellykka, framhevar Manno kor viktig det er at læraren i denne situasjonen må ha full kontroll på og oversikt over alle situasjonar som måtte oppstå under prosessen.
To viktige poeng til slutt:

1) Den adidaktiske situasjonen må ikkje forvekslast med den non-didaktiske situasjonen. Ein non-didaktisk situasjon er i følgje Manno :
"… a pedagogical situation with no particular link to a specific knowledge. Students can play with a mathematical tool but the strategies they use are not specific to a cognitive aim. In a non-didactical situation the teacher does not create an environment suitable to learn a specific knowledge."
(Manno 2006 s 24)

2) Vi såg at den adidaktiske situasjonen kunne delast inn i 5 delsituasjonar. Dette representerer eit nytt analyseverktøy/ forklaringsmodell til bruk på resultata frå forsøket elevane gjorde. Det vil være eit verktøy som er solid forankra i pedagogisk teori, og som vil kunne belyse funn frå ein heilt anna ståstad enn kva trinnmodellen til Blomhøj & Jensen gjer. I tillegg vil det være eit meir generelt gjeldane verktøy som vil kunne brukast i andre situasjonar enn reine modelleringsopplegg. Eg vil innleiingsvis i kapittel 6 vise at dei to analyseverktøya utvikla i dette kapittelet er såpass ekvivalente at eg kan bruke dei begge som forklaringsmodellar til funna eg har gjort. Her vil eg og trekkje fram nokre av forskjellane mellom dei.

<u>Kapittel 2.4.3.2: Den didaktiske kontrakten</u>

Ideen om den didaktiske kontrakten har vore brukt til å gjere reie for og å beskrive dynamikken i ein matematisk undervisningssituasjon. Undervisningssituasjonen det som regel er tale om er den tradisjonelle situasjonen eg definerte i kapittel 2.2.3.4. Omgrepet didaktisk kontrakt er mykje nytta i pedagogisk forsking. Det vil såleis være fleire overlappande definisjonar på kva omgrepet inneberer. Brousseau sjølv forklarte først omgrepet som:

The didactical contract is the rule of the game and the strategy of the didactical situation. It is the justification that the teacher has for presenting the situation. (Theory of Didactical Situations in Mathematics s31)

Seinare presenterte han denne meir presise definisjonen:

> *The set of the teacher's behaviours (specific [to the taught knowledge]) expected by the student and the set of the student's behaviour expected by the teacher.*
> *(*Sarrazy, B et al. ZDM Mathematics Education (2013) 45: 281. doi:10.1007/s11858-013-0496-4)

Med utgangspunkt i definisjonane vil ein didaktisk kontrakt såleis innehalde ein implisitt avtale mellom elevar og læraren der læraren må undervise og formidle kunnskapen i ein gitt didaktisk situasjon og elevane må tileigne seg denne same kunnskapen. Dei didaktiske situasjonane vil i følgje Brousseau, modifisere den didaktiske kontrakten. Dette vil i sin tur legge til rette for at nye didaktiske situasjonar oppstår. På tilsvarande vis er kunnskap det som kjem til uttrykk gjennom strategiane elevane utviklar i den adidaktiske situasjonen då utviklinga av slike strategiar vil krevje utvikling av kunnskap. Denne nyutvikla kunnskapen vil opne for nye og til dels meir avanserte adidaktiske situasjonar. Den didaktiske kontrakten er såleis ikkje ein generell pedagogisk kontrakt. Snarare er den tett knytt til den spesifikke kunnskapen ein søkjer å utvikle. Korleis ein gitt kontrakt er oppfylt i ein gitt situasjon vil komme til uttrykk i form av underforståtte forventningar om korleis lærar og elevar skal forhalde seg til undervisningssituasjonen og til kvarandre. Det vil ligge eit sett med ikkje-uttala normer til grunn som underbygger korleis dei to partane skal vekselvirke.
Eit døme på ein slik norm er at det er læraren si oppgåve å vurdere kortid ein elev har tileigna seg ein spesifisert kunnskapsmengd, og det er eleven si oppgåve å framstille tilstrekkeleg grunnlagsmateriale slik at læraren er i stand til å føreta vurderinga. Eit anna døme er forventninga elevane har til læraren om at oppgåvene han gir er relevante for både den aktuelle kunnskapen han søkjer å formidle og for eventuelle vurderingssituasjonar
Som for andre typar kontraktar, vil og ein didaktisk kontrakt medføre visse konsekvensar for dei involverte partane. Brousseau sjølv nemner følgjande:

- læraren er meint å skape tilstrekkelege forhold for tileigning av kunnskap, og må kjenne igjen tilfella der tileigninga har førekomme
- elevane er meint å være i stand til å tileigne seg kunnskapen under dei tilhøva læraren skaper
- elevane har forventningar til læraren om at han skaper forhold for at dei skal kunne tileigne seg den aktuelle kunnskapen.
- læraren antek at tidlegare læring saman med dei nye tilrettelagde tilhøva legg til rette for moglegheiter for ny læring hjå elevane

Didaktiske kontraktar er vidare ikkje statiske konstruksjonar. Dei vil være avhengige både av kva som skal undervisast, kven det skal undervisast for og kven som underviser. I løpet av ei undervisningssøkt vil kontrakten kunne endre seg ettersom kunnskapen hjå elevane endrar seg. Det er og viktig å ha i tankane at ulike elevar vil reagere ulikt innan same kontrakt. Bernhard Sarrazy kalla dette *«responsiveness to the didactic contract» (Sarrazy, 2002)*
Eit mykje brukt dømet på dette er det såkalla «Alderen til kapteinen»-problemet:

> *On a boat there are 26 sheep and 10 goats. What is the age of the captain?" If you set this problem to schoolchildren of 9-10 years, as a group of researchers from the IREM in Grenoble did in 1979, more than three quarters of them calculate the age by adding the figures together. (Sarrazy, 2002)*

Han gjer vidare uttrykk for at om det skal ha noko for seg å stille eit slikt spørsmål, kan ikkje læraren eksplisitt gje uttrykk for kva han forventar elevane skal svare. Dei kan berre undre seg over kva læraren forventar av dei: Må dei vise at dei mestrar addisjon av tosifra tal? Det er trass alt den typen forventningar læraren vanlegvis har til dei. Om dei skulle gå for denne løysinga, må dei bevisst eller ubevisst ignorere den underlege samanhengen tala vert presenterte i. Alternativt kan dei på eit eller anna vis kommentere nettopp denne samanhengen og såleis våge å reagere heilt annleis på ei oppgåve gitt av læraren enn det dei normalt ville ha gjort. Tankar om slike implisitte forventningar frå læraren hadde Brousseau vore inne på tidlegare. Han hevda at det var nettopp i slike tilfelle der læraren ikkje eksplisitt gav uttrykk for dei didaktiske intensjonane sine at dei gode adidaktiske situasjonane oppstod og såleis og den nye kunnskapen:

> *We shall see that a totally explicit contract of this kind is doomed to failure. In particular, clauses concerning the breaking and the stake of the contract cannot be written in advance. Knowledge will be exactly the thing that will solve the crises caused by such breakdowns; it cannot be defined in advance. However, at the moment of such a breakdown, everything happens as if an implicit contract were linking the teacher and the student; surprise for the student, who doesn't know how to solve the problem and who rebels against what the teacher cannot give her the ability to do—surprise for the teacher, who reasonably thought that she performed sufficiently well—revolt, negotiation, search for a new contract which depends on the new "state" of knowledge, acquired and desired.* (Theory of Didactical Situations in Mathematics s32**)**

Eit anna sentralt moment er fleksibiliteten til lærarane. Om ein lærar er lite fleksibel i undervisninga si med liten variasjon, vil elevane gjennomskue læraren sine forventningar. Dei vil då fort skjøne kva krav læraren set til svara for at dei skal vurderast positivt. Dette kan føre til at elevane trur dei verkeleg har forstått problema/oppgåvene læraren gir og at dei har tileigna seg ein djup forståing av desse. Realiteten vil være at den tileigna kunnskapen ofte vil være overflatisk og kun eigna til å løyse dei mest grunnleggande oppgåvene. Om læraren derimot varierer undervisninga vil det være vanskeleg for elevane å dedusere seg fram til det rette svaret kun basert på på måten oppgåvene er formulerte på. Elevane vi såleis måtte innvolvere seg langt meir i læringsprosessen og dermed auke moglegheitene for å tileigne seg den ettersøkte djupe forståinga av dei aktuelle problema.

Kapittel 2.5: Situert læring, eit lite appendiks

Kanskje det største ankepunktet mot den praktiske delen av oppgåva mi er det faktum at eit forsøk innan matematikkdidaktikk ikkje føregår i dei regulære matematikktimane. Hovudårsaka til at dette er eit kritikkverdig punkt er at ein kan forvente at elevane vil oppføre seg og reagere forskjellig på undervisningsopplegget om det vert presentert utanfor regulær matematikkundervisning. Eg vil difor her, som eit slags appendiks til teoridelen av oppgåva, kort gjere reie for omgrepet «situert læring», og bruke det som ein forklaringsmodell for at den endra oppførselen til elevane. Eg vil såleis ha eit mentalt reiskap til disposisjon som vil gjere det lettare for meg å identifisere teikn på endringar i haldning og oppførsel hjå elevane knytte til denne problematikken. I følgje Skott, Jess og Hansen (2008), vil situert læring innebere at læringsprosessen er fundamentalt avhengig av situasjonen den føregår i. Dei hevdar vidare at situasjonen ikkje berre er bestemmande for sjølve læringsprosessen, den er og avgjerande for karakteren til det som vert lært. Eit sentralt moment i ein diskusjon rundt situert læring er det såkalla overføringsspørsmålet. Dette er eit gammalt spørsmål innan psykologien som omhandlar korleis kunnskap kan overførast frå ein samanheng til ein annan og som oppsto «*…som en undren over at en sådan transfer ikke let lar sig realisere.*» (Scott, Jess og Hansen 2008)

I denne samanhengen vil såleis spørsmålet være kvifor har elevane problem med å anvende matematikken i ein situasjon som er svært ulik situasjonen dei lærde matematikken i.
Scott, Jess og Hansen er inne på eit mogleg svar. Dei tek utgangspunkt i at det vil finnast to syn på kva matematikk er:

> « *Dels består faget av et sæt af resultater, procedurer mv, der har udgangspunkt i kvantitative og geometriske beskrivelser af vores omverden. Disse produkter er udviklet*

over århudreder, og eleverne forventes at udvikle en forståelse af dem og en færdighed i at benytte dem.
Dels er matematik den proces det er at udvikle sådanne produkter, dvs fx at overveje hvorden en type problemer bedst kan løses, at udvikle et ræconnement der godtgør, at ens resultat er rigtigt, eller forklare for sig sjølv eller andre hvad der er sammenhængen mellem forskellige måder at repræsentere et matematisk begrep på.»
(Scott, Jess og Hansen 2008)

Poenget til forfattarane er då at skulematematikken legg for stor vekt på det første synet, noko som fører med seg ein meir instrumentell forståing av faget. Framstillinga av teorien bak 2.ordens differensiallikningar i lærebøkene brukt i den vidaregåande skulen til dømes, bærer eit spesielt sterkt preg av akkurat denne vektlegginga.
Moglege konsekvensar av denne einsidige vektlegginga vil ikkje berre være at elevane oppfattar matematikken som noko som kun føregår i klasserommet, den fører og til ein forventning om at det berre er i matematikktimane den skal føregå i. Det er berre når forventningane om tid og stad er oppfylte at det er naudsynt å forhalde seg til matematikken. Med Brousseau sin terminologi kan vi såleis hevde at den didaktiske kontrakten rundt matematikkundervisninga vert svært snevert definert hjå elevane.

Kapittel 3: Metode

Eit overordna mål med didaktisk forsking er at resultata ein kjem fram til har størst mogleg overføringsverdi til andre situasjonar. Resultata bør difor både oppfattast som relevante for flest mogleg undervisarar og ha overføringsverdi til flest mogleg praktiske situasjonar. Denne tanken vil være utgangspunktet for val av forskingsmetode og utarbeiding av design. Det er kjent m.a. frå Creswell (2012) at kan dele forskingsmetodar inn i to hovudgrupper; kvantitative og kvalitative metodar. Eg vil i det følgjande gå inn på kva eg legg i desse omgrepa, før eg så knytter dei til metodevalget eg gjorde for denne oppgåva.

Kapittel 3.1: Kvantitative metodar

Kvantitative metodar har ein deduktiv struktur. Med utgangspunkt i ein teori rundt eit fenomen, vil ein undersøkje haldbarheita til teorien. Deduktive studiar testar med andre ord teorien opp mot empirien. Ein vil ut i frå teorien prøve å formulere ein eller fleire hypotesar. Dette fordrar at ein klarar å identifisere ein presis problemstilling som kan forklarast ved å søkje etter ein samanheng mellom to eller fleire kvantifiserbare variablar.
Med utgangspunkt desse hypotesane vil ein så ved hjelp av matematiske modellar, tidlegare resultat og logikk teste ut hypotesane og på det grunnlaget teste ut haldbarheita til teorien.
I denne samanhengen er omgrepet «hypotese» synonymt med ein «påstand om ein samanheng», medan det med omgrepet «teori» vert meint ein matematisk eller logisk forklaring på fenomena. Teorien vil både verte prøvd opp mot eksisterande måledata i tillegg til at den må kunne gje innsikt i ny kunnskap innan fagfeltet. Det vil være viktig for truverdet til ei kvantitativ studie å ha eit relativt stort datagrunnlag. Dette har sin bakgrunn i dei statistiske metodane datagrunnlaget vert handsama med. Eit anna sentralt element er kravet om objektivitet hjå forskaren. Objektiviteten må gjenspeglast i alle ledd i forskingsprosessen, frå formulering av metode og design til sluttrapport. Ei ulempe med kvantitative metodar er at ein må studere system og variablar som faktisk lar kvantifisere. Dette inneber eit krav om ein eintydig definering av variablar. Dette vil på si side kreve at spørsmåla ein stiller må være spesifikke og smale. Det er såleis ein reell risiko for at går glipp av relevante data som ikkje er dekka av spørsmåla. Ei djupare vitskapsteoretisk ulempe er at ein i teorien ikkje vil kunne avgjere om ei hypotese er sann, ein vil berre kunne avgjere at ho eventuelt er usann.
Metodane vil vidare som regel kreve ein høg grad av matematisering, og dei vil krevje ein

tydeleg samanheng mellom dei aktuelle storleikane som inngår i studia. Innan psykologiske og filologiske fagfelt vil dette ofte være vanskeleg å få til. Det er fordi fenomena ein ønskjer å studere ofte er svært samansette både i årsak og form. I tillegg vil det ofte være vanskeleg å isolere eit bestemt aspekt ved det ein ønskjer å studere.

Kapittel 3.2: Kvalitative metodar

Kvalitative metodar er av ein induktiv natur. I følgje estudie.no, vil ein observere den aktuelle problemstillinga for å komme frem til ein teori om eit fenomen. Ei induktiv undersøking prøver å sei noko om det aktuelle fenomenet utan klare hypotesar og med ein lausare definert problemstilling enn kva som vil krevjast ved deduktive studiar. Ein vil søkje etter regelmessige trekk i datasetta, tendensar og samanhengar i observasjonane, som så vil verte generalisert til tilfelle utover studia ein gjennomfører. Innan kvalitative metodar søkjer ein først og fremst å utvikle ei djup forståing av eit fenomen. Ein vil nytte djuptgåande studiar av små grupper til å utvikle og støtte hypotesar og resultata vil være beskrivande snarare enn predikative. Styrken til kvalitative metodar er evna til å skaffe forskaren komplekse oversyn over korleis forskingsspørsmåla vert oppfatta hjå respondentane. Dei vil og gje informasjon om dei menneskelege aspekta ved eit problem. Dette er aspekt som er til dels uråd å kvantifisere og som vil være aspekt knytt til personleg meiningar, religiøse spørsmål, kjensler og personlege høve. Kvalitative metodar er og effektive til å fange opp bakanforliggande og underforståtte faktorarar som sosiale normer, sosioøkonomisk status, kjønnsrollemønster og religiøse normer. Rolla til desse faktorane er ikkje alltid like opplagt og kan såleis ha ein uforutsett innverknad på resultata. Når det gjeld funna frå ein kvalitativ studie, vil den ofte kunne utvidast til å gjelde for grupper og situasjonar av tilsvarande karakter som den undersøkte og såleis legge til rette for ein rik og kompleks forståing av eit spesifikt sosialt fenomen eller samanheng. Det er ikkje uvanleg at målsettinga om djupast mogleg forståing går på kostnad av i kor stor grad resultata lar seg generalisere.

Kap 3.3: Metodeval

Ut i frå det som er sagt ovanfor, velgjer eg eit kvalitativt forskingsdesign for denne oppgåva. Eg vil innhente data gjennom tre kanalar:

I)

Notat frå klasseobservasjonar. Desse vil eg ta fortløpande i dei timane elevane arbeider med prosjektet. Eg vil her nytte eit sjølvutvikla notatskjema.

II)

Elevane fyller ut eit spørreskjema.

Eg vil utarbeidde eit spørjeskjema til elevane. Det er kvalitetssikra gjennom piloten. Målet spørjeskjemaet er å prøve å kartleggje ulike aspekt som t.d. om elevane føler den ekstra innsatsen og tidsbruken er verdt resultatet, om det er ein auka interesse for temaet, om det kan ha oppstått ønskje om større fordjuping i temaet.

III)

Intervju med utvalde elevar.

Gjennom korte intervju med utvalde elevar. samt bruk av rapportane dei leverer.

Svara frå spørreundersøkinga vil og være med å danne grunnlaget for kva elevar eg vel ut som intervjuobjekt. Primærtanken er å velje ut elvar der det ikkje er samsvar mellom oppnådd karakter og svara frå spørreundersøkinga. Designet er eit som tek utgangspunkt i følgjande utsegn frå Cresswell:

«Studies of single classrooms abstracted as small societies»

(Creswell 2012 s463)

Vidare vil det oppfylle følgjande krav:

> "*The realist ethnographer narrates the study in a third-person dispassionate voice and reports on observations of participants and their views. The ethnographer does not offer personal refl ections in the research report and remains in the background as an omniscient reporter of the "facts."*
>
> *The researcher reports objective data in a measured style uncontaminated by personal bias, political goals, and judgment.*
>
> *The researcher may provide mundane details of everyday life among the people studied.*
>
> *The ethnographer produces the participants' views through closely edited quotations and has the final word on the interpretation and presentation of the culture"*
>
> *(Creswell 2012 s464)*

Designet kan såleis seiast å være ei blanding av det Creswell kallar eit *«realist ethnograpic design» (Creswell 2012)* representert ved klasseobservasjonane og eit "*cross-sectional survey design"(Creswell 2012),* som vil være representert ved spørreskjema og ved intervjudelen.

Kapittel 4: Den matematiske bakgrunnen

Kapittel 4.1: Innleiing

Målet med følgjande kapittel er å reiegjere i detalj først om det matematiske grunnlaget for forsøket eg gjennomførte, deretter om sjølve forsøket som dannar det empiriske grunnlaget for oppgåva. Poenget er såleis å klargjere kva som er utgangspunktet for den praktiske delen av oppgåva før den vert knytt saman med den teoretiske delen frå kapittel 3.

Kapittel 4.2: Matematisk grunnlag

Kapittel 4.2.1: Innleiande oversyn

I læreplanen til matematikkurset R2 vert det introdusert tre heilt nye matematiske tema:
- integralrekning
- rekkjer
- differensiallikningar.

Alle andre tema byggjer direkte på tema introduserte i R1 og representerer såleis stort sett utvidingar og generaliseringar av kjende tema. Om differensiallikningar seier læreplanen m.a.:

- modellere praktiske situasjoner ved å omforme problemstillingen til en differensiallikning, løse den og tolke resultatet
- løse andre ordens homogene differensiallikninger og bruke Newtons andre lov til å beskrive frie svingninger ved periodiske funksjoner

Ved å bestemme meg for å velje differensiallikningar som tema for forsøket, vil eg ikkje berre undersøkje reaksjonar frå eit tema spesifikt for R2, eg vil og skape ein læringssituasjon som kan seiast å dekkje to læreplanmål. I tillegg vil elevane møte eit forsøk dei har teoretisk kjennskap til. Sjølv om læreplanen ikkje avgrensar pensumet til andre ordens homogene differensiallikningar med konstante koeffisientar, vil i praksis alle likningar elvane løyser analytisk være med konstante koeffisientar. I den grad elevane møter problem med variable koeffisientar, vert desse løyste v.h.a. CAS-verktøy. Løysing av andre ordens differensiallikningar vert som regel introdusert ved å på ein eller ann vis får elevane til å finne ein funksjon som er slik at

$$f(x) = a \cdot f``(x). \qquad (1)$$

Dei vil då som regel føreslå enten eksponesialfunksjonen $e^{f(x)}$ eller ein av dei to grunnleggande trigonometriske funksjonane, sin (k·x) eller cos (k·x).
Ut i frå dette vert då ein standard løysingsalgoritme for å løyse likningar på forma:

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ introdusert og forklart. (2)

Den er i grove trekk som følgjer:
1) Sett opp og løys den tilhøyrande karakteristiske likninga

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0 \qquad (3)$$

2) Avhengig av om ein får to reelle løysingar, r_1 og r_2, ein gjentakande reell løysing, r_1, eller ingen reelle løysingar av likning (3), $r = p \pm q\sqrt{-1}$ (4)

er løysinga på likning (2) hhv

$$y = C \cdot e^{r_1 x} + D \cdot e^{r_2 x} \qquad (5)$$

$$y = (C + D \cdot x) \cdot e^{r_1 x} \qquad (6)$$

$$y = e^{px} \cdot (C \cdot \sin(qx) + D \cdot \cos(qx)) \qquad (7)$$

Her er C og D konstantar som vert bestemt ut i frå gitte startkrav.

Oppgåvene vil variere frå reine treningsoppgåver til meir avanserte tekstoppgåver.
I treningsoppgåvene er likningane ferdig sette opp, og elevane må stort sett nytte løysings-algoritma for å finne rett funksjon. I tekstoppgåvene må elevane hente opplysningar ut ifrå teksten, sette opp likninga, løyse den og tilslutt tolke svaret. Dette gjer oppgåvene merkbart meir krevande.

Kapittel 4.2.3: Harmoniske svingingar

Ein harmonisk svinging er ein svinging med konstant frekvens. Er i tillegg amplituden konstant har vi ein såkalla udempa svinging. Pensum i R2 omhandlar både dempa og udempa svingingar i ein dimensjon. Vidare er dei avgrensa til mekaniske svingingar i ei fjør.
For å komme fram til likninga som beskriv svingingane tek ein utgangspunkt i mekanikken, nærmare bestemt Newton si andre lov:

$\sum F = m \cdot a$ (8)

Her F er kreftene som virkar på eit lodd i enden av ei fjør, m er massen til loddet og a er akselerasjonen til loddet. Kreftene og akselerasjonen er vektorstorleikar. For å halde matematikken på ein nivå kompatibelt med forkunnskapane til elevane, antek vi at fjøra er masselaus. Reknar vi med udempa svingingar antek vi i tillegg at friksjonen er null. Vidare antek vi at strekkrafta på fjøra følgjer Hooke`s lov:

$S = - k \cdot y,$ (9)

der y er avstanden frå loddet sin posisjonen til likevektspunktet, k er den s.k. fjørkonstanten. Reint matematisk er den berre ein proporsjonalitetskonstant, men fysisk er den eit uttrykk for kor stiv fjøra er. Det negative forteiknet viser at retninga til S alltid er motsett retta i høve til posisjonsvektoren. Dette viser at S alltid vil være retta mot likevektspunktet. Friksjonskrafta, R, antek vi er proporsjonal med hastigheita loddet beveger seg med:

$R = \mu \cdot v$ (10)

På same vis som k, er μ matematisk sett ein proporsjonalitetskonstant, men fysisk er μ q eit mål for kor stor friksjonen mellom to objekt som glir mot ein annan er. μ vert kalla friksjonstalet. Hastigheita er ein vektorstorleik. Retninga til friksjonskrafta vil alltid være mot rørsla, dvs at R og S har motsett forteikn.Vi kan då sette opp følgjande to likningar:

<u>For udempa svingingar:</u>

$$\sum F = m \cdot a$$

$$-k \cdot y = m \cdot a \qquad (11)$$

$$k \cdot y + m \cdot a = 0 \qquad (12)$$

<u>For dempa svingingar får vi:</u>

$$\sum F = m \cdot a$$

$$S - R = m \cdot a \qquad (13)$$

$$-k \cdot y - \mu \cdot v - m \cdot a = 0 \quad (14)$$

$$k \cdot y + \mu \cdot v + m \cdot a = 0 \quad (15)$$

Det neste steget er å hugse på følgjande samanhengar:

$$s`(t) = v(t) \quad (16)$$

og

$$s``(t) = v`(t) = a(t) \quad (17)$$

Her er s(t) den vertikale posisjonen y, ved tida t, v(t) er hastigheita ved same tidspunkt og a(t) er akselerasjonen. Set vi desse uttykka inn i uttrykka for svingingane får vi då til slutt dei to aktuelle differensiallikningane.

$$k \cdot y + m \cdot y`` = 0 \quad (18)$$

og

$$k \cdot y + \mu \cdot y` + m \cdot y`` = 0 \quad (19)$$

Dei fleste av elevane som tek R2 kurset har tatt fysikk 1 kurset på vg 2 nivå. Dei er såleis kjende med dei fleste av storleikane som inngår i denne utleiinga. Eit lite poeng her er at for desse elevane vil denne utleiinga på mange vis representere ein form for brot med den didaktiske kontrakten i matematikk. Dette fordi dei opplever at begrep og tankesett frå fysikken brått vert teke i bruk i matematikkundervisninga. Ei typisk oppgåve vil ut ifrå dette være å sette opp differensiallikninga ut i frå gitte verdiar av k, μ, og m, og løyse likninga. I tillegg vil det typisk være eit par oppfølgingsspørsmål for å undersøkje om elevane har forstått kva løysinga inneberer.

Kapittel 4.3: Om forsøket

Kapittel 4.3.1:Innleiande moment

Forsøket går ut på at elevane ved hjelp av fleire måleseriar av posisjonen til eit vertikalt pendlande lodd med kjend masse først finn fjørkonstanten k. Dette gjer dei ved å tilnærme den dempa svinginga til loddet med ein udempa svinging. Det kan vi gjere dersom verdien for fjørkonstanten er liten og massen til loddet er relativt stor. Om vi i tillegg berre lar loddet svinge eit fåtal periodar, vil tilnærminga være god. Vidare kombinerer ein regresjonsmodell og teorien frå løysingsalgoritmen til 2.ordens homogene differensiallikningar med konstante koeffisientar. Deretter bruker dei dette resultatet saman med same teorien til å finne ein verdi for µ. Funksjonen P(x) dei kjem framtil vil då representere ein modell for rørsla til loddet. Modellen kan dei så kvalitetsteste gjennom fleire forsøk med pendelen eller eventuelt andre metodar. Eitt viktig poeng er at når elevane først er komne i gang med forsøket, skal dei i så stor grad som råd arbeide sjølvstendig. Dette stiller sjølvsagt store krav til meg som lærar når eg skal førebu elevane. Før sjølve forsøket vert sett i gang, vil eg utarbeide eit informasjonsark som eg deler ut. Eg kjem og til å gjere det klart for elevane at dei no skal forsøke å lære seg matematikk på ein ved å nytte ein uvant undervisningsmetode. Tanken var opprinnleg å la ei R2 gruppe gjennomføre desse forsøka, for deretter å undersøkje dei påfølgjande prøveresultata med den andre R2 gruppa her på skulen med tanke på signifikante forskjellar. Av ulike årsaker måtte planen endrast, slik at no vil forsøka verte gjennomførte i ein klasse som har teknologi og forskingslære 2. Dette kan eg gjere med belegg i læreplanmåla om «Den unge forskaren». Det vil verte utført ein pilotundersøking. Denne vil være utført på eit anna årskull enn hovudforsøket. Ei ulempe med den reviderte planen er at eg er nøydd å gjennomføre forsøket svært tidleg i skuleåret. Dette medfører at dei ikkje vil ha så brei erfaring med integralrekning som dei ville hatt med den opprinnlege planen. For sikre meg om at alle elvane har dei naudsynte kunnskapane, vil eg difor verte nøydd å bruke ekstra tid på den førebuande matematikken. Heldigvis er det slik ved å gjennomføre forsøket i teknologi og forskingslære har vi mykje betre tid enn i R2.

<u>Kapittel 4.3.2: Finne fjørkonstanten k, til ein vertikal pendel</u>

Vi har ei lang vertikalt hengande fjør med låg fjørkonstant og eit lodd med ein kjent masse i enden. Fjøra heng mot ein bakgrunn med rutenett og eit stativ til å feste eit kamera i.
Vi set loddet i ein vertikal svingetilstand som elevane filmar. Med god tilnærming vil loddet svinge udempa dei første periodane. Ut i frå innsamla måledata, lagar elevane ein graf ved hjelp av sinusregresjon i Geogebra som beskriv rørsla. Denne funksjonen vil representere ei løysing på den aktuelle differensiallikninga. Når elevane skal bruke løysingsalgoritmen motsett veg for å finn ein verdi for fjørkonstanten k, kan då gå fram på følgjande vis:
Den opphavlege likninga som beskriv rørsla er som kjent frå likning (18):

$$k \cdot y + m \cdot y`` = 0$$

Med verdiane for k og m eg har tenkt å bruke får vi komplekse løysingar på den karakteristiske likninga.
Denne likninga vil være på forma

$m \cdot r^2 + k = 0$ (20)

Dette gir løysinga på forma vi hugsar frå likning (4):

$$r = p \pm q\sqrt{-1}$$

Då p her vil være null får vi det forenkla uttrykket:

$$r = \pm q\sqrt{-1} \quad (21)$$

Dette gir då løysingar på forma:

$$y = C \cdot \sin(qx) + D \cdot \cos(qx) \quad (22)$$

Det vil då være elevane si oppgåve å sjå følgjande to viktige moment:

I) Startkravet $y(0) = 0$ gir oss at faktoren D må være lik null (23)
Ser dei dette, vil dei og sjå at funksjonen dei har kome fram til i Geogebra er på same form som løysinga på likninga

II) Koeffisienten q er gitt ved $q^2 = k/m$ (24)
No er massen til loddet kjent og q får dei frå regresjonsanalysen. Elevane vil såleis kunne finne ein verdi for k.

Etter dette er gjort kan resultata samanliknast med data funne frå strekkforsøk med kraftmålar. Om det ikkje er samsvar mellom dei to verdiane, kan elevane fundere på kva som kunne vore gjort på ein annan måte for å oppnå eit resultat meir i tråd med verdiane strekkforsøka. Som ein vidare ser vil fjørkonstanten k være avhengig av kvadratet av q. Ein var såleis avhengig av å ha data av høg kvalitet som grunnlag for utrekningane av q om ein skulle ha håp om å få resultat som er tilfredstillande

Kapittel 4.3.3: Finne storleiken til dempingsleddet μ

Lar vi svingingane forsette ei tid ser vi at dei er dempa. Igjen filmar elevane svingingane for å bruke avleste data. Likninga som beskriv rørsla no er som kjent frå likning (19):

$$k \cdot y + \mu \cdot y` + m \cdot y`` = 0$$

Og løysinga er på forma frå likning (7) :

$$y = e^{px} \cdot (C \cdot \sin(qx) + D \cdot \cos(qx))$$

Problemet elevane møter no er Geogebra berre klarar å parametrisere datasettet ved hjelp av.

ein type funksjon, slik at om elevane bruker sinusregresjon på same vis som i del 1 av forsøket, vil dei ikkje komme fram ein funksjon, F(x), som er på same form som løysinga av differensiallikninga. Ein mogleg framgangsmåte vil være å teikne grafen i Geogebra for så å merke av alle toppunkta eller botnpunkta på grafen. Førstekoordinatane til punkta kan så brukast som datagrunnlag for ein eksponensialfunksjon E(x). Denne vil fungere som amplitudefunksjon til løysinga P(x). Ein vil då ha ein verdi for *p*.

Når elevane er komne så langt, vil eg utfordre dei til å tenkje gjennom kva storleikane *p* og *q* i det generelle uttrykket for løysinga eigentleg representerer. Løysinga er, som vi har vore inne på tidlegare, på forma gitt ved likning (4):

$$r = p \pm q\sqrt{-1}$$

Eg vil m.a.o. prøve å få dei til å uttrykke desse to storleikane ved hjelp av parametrane som inngår i den opphavlege differensiallikninga. Dei må gjennomføre følgjande tankerekkje:

Den karakteristiske likninga til differensiallikninga vil være på forma:

$$m \cdot r^2 + \mu \cdot r + k = 0 \tag{25}$$

Løysinga på den karakteristiske likninga vil være:

$$r = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2k} \tag{26}$$

Frå dette ser vi at *p* i likning (4) må være gitt ved:

$$p = \frac{-\mu}{2k} \tag{27}$$

Og vi ser at *q* i likning (4) vil være gitt ved:

$$q^2 = \frac{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}{4 \cdot k^2} \tag{28}$$

Sidan vi allereie veit verdien for *p* frå E(x) og verdien for *k* frå første del av forsøket, kan elevane no finne μ og deretter *q*. Dei funne verdiane for *p* og *q* set vi så inn i likning (7) og får såleis eit uttrykk for P(x). Resultatet vil, slik som vart gjort i del 1, verte kontrollert opp imot fleire forsøk med pendelen.

Kapittel 5: Resultat frå forsøk

Kapittel 5.1:Innleiing

Målsettinga med dette kapittelet er todelt:
I den første delen vil eg reflektere rundt utfordringane elevane møtte både sett i lys av dei to teoretiske pilarane frå kapittel tre i tillegg til tankane rundt dei fire kompetansenivåa.
Dette vil inkludere identifisering av kjenneteikn hjå elevane på at dei ulike trinna / delsituasjonane er nådd. Eg vil og reiegjere for konsekvensane for min eigen undervisningspraksis gjennomføringa av elevforsøket medførte. Desse konsekvensane knyttar eg opp mot teorien reiegjort for tidlegare, med eit spesielt fokus på Brousseau.
I den andre delen av kapittelet vil eg reiegjere for observasjonane eg gjorde og funna eg meiner å ha gjort basert på desse.

Kapittel 5.2: Refleksjonar rundt erfaringa frå forsøket

Kapittel 5.2.1: Modellering i praksis og i teori

Utgangspunktet for modelleringsprosjektet er at elevane som deltek befinn seg på det lågaste kompetansenivået, det såkalla ubevisst inkompetente nivået (mi oversetting).
Dette er eit kompetansenivå som ligg under nivået som det første trinnet til Blomhøj & Jensen legg opp til. Dei hadde i utgangspunktet ikkje forutsetningar for å klare å utarbeide ein

> "*Formulation of a task (more or less explicit) that guides you to identify the characteristics of the perceived reality that is to be modelled.*"
> (Blomhøj & Jensen 2003)

Dette er årsaka til at eg måtte innleie prosessen med å gjennomgå dei grunnleggande matematiske momenta. Denne fasen var prega av stor usikkerheit blant elevane både om den matematiske teorien så vel som kva forsøket eigentleg gjekk ut på og baud såleis på utfordringar både for meg som lærar og for elevane. Ein akutt risiko i denne innleiande fasen ville være at elevane gjekk leie og ikkje var villige til å legge ned arbeidet som er nødvendig. Typiske reaksjonar eg kunne forvente dersom ein slik situasjon oppstod var utsegner av typen «Eg skjønner ingenting av kva vi skal gjere» og «Kan vi ikkje berre lære matten på den vanlige måten?» Som vi kjem nærare inn på i del to av dette kapittelet, vart denne typen reaksjonar observerte.

For at det første trinnet til Blomhøj & Jensen skal være meiningsfullt, måtte elevane ha klart å opparbeide seg ein visst minimumskunnskap om den aktuelle matematikken. I tillegg måtte dei ha ein ide om dei fysiske omgrepa som var aktuelle, amplitude, periode, krefter osv. Summen av alle forkunnskapane inngår i det Blomhøj & Jensen kalla
"perceived reality". (Blomhøj & Jensen, 2003) I forsøket til elevane tilsvarte dette tankane og oppfatningane elevane hadde rundt fenomena dempa og udempa svingingar. Dette inkluderte alle forkunnskaper innan matematikk i tillegg til eventuelle forkunnskapar innan fysikk. Typiske kjenneteikn på elevar i denne fasen var spørsmål som omhandlar fundamentale problem som kva storleikar dei skal måle, heilt grunnleggande spørsmål kring matematikken og programvara i tillegg til spørsmål som gjekk på den praktiske gjennomføringa.
Dei hadde då nådd det andre nivået kompetansemodellen; bevisst inkompetent.
Ved å arbeide med å formulere ein konkret problemstilling, nådde elevane etterkvart det neste trinnet: det undersøkande domenet. Her reflekterte dei over kva det er som karakteriserer svingingar, kva storleikar påverkar svingingane samt at dei fekk ein klarare ide om kva målingane gjekk ut på.
Ved å utnytte kunnskapane om dei identifiserte variablane, klarte elevane å arbeide seg opp på det systematiserande nivået. Eit avgjerande trinn i denne prosessen var idealiseringa av modelleringssituasjonen. I dette legg eg at elevane måtte klare å sjå for seg ein modell av svingingane som var såpass enkel at matematikken ikkje vart for avansert. Dette inneberer heilt konkret at dei såg bort frå faktorar som luftmotstand, friksjon i opphenget til fjøra, at fjøra som regel ikkje berre svingar i berre ein dimensjon og det faktum at fjøra har ein masse. På dette nivået formulerte elevane tankar rundt korleis dei ulike parametrane i likningane påverkar den reelle svinginga. Dei prøvde og å finne avgrensingane til modellen og prosessen munna ut i ein begynnande matematisering av den konkrete situasjonen. Dette manifesterte seg i ein gryande gjenkjenning av samanhengane mellom dei målte storleikane og parametrane som inngår i differensiallikninga. Kjenneteikn på at dette nivået var oppnådd var nettopp spørsmål kring idealiseringsprosessen i tillegg til spørsmål og kommentarar knytt til parametrane i sjølve differensiallikninga. Det kunne no hevdast at elevane hadde nådd det tredje kompetanse nivået: bevisst kompetanse.
Ved ein vidare bevisstgjering av matematikken nådde elevane det «matematiske system nivået» Her hadde dei ferdigstilt dei første utkasta til modell. Risikoen for at modellen deira gav lite samsvar med dei verkelege svingingane var aktuell, og fleire av gruppene opplevde nettopp dette. Ein slik situasjon kravde at elevane både meistra matematikken som ligg til grunn og at dei beherska dei relevante programvarene. Programvarene dreia seg om var

Geogebra og enkel Arduino-programmering. Reaksjonane frå elevane var naturleg nok avhengig av kor gode resultat dei kom fram til, men uansett resultat var det kritisk viktig for det følgjande arbeidet at dei analyserte resultata og gjennomgjekk modellen for å forstå i detalj kvifor dei fekk dei oppnådde resultata. Denne analysen vil representerte trinn d) i prosessen til Blomhøj og Jensen nemt i kapittel 2.2.3.3. Elevane var no i stand til å bruke modellen og å samanlikne den med måledata frå forsøket. På dette nivået beherska elevane dei naudsynte matematiske teknikkane, slik at for sjølve løysingsalgoritma kan det hevdast at dei no har nådd det fjerde kompetansenivået, den ubevisste kompetansen. Elevane stilte no spørsmål som dreide seg om tema som talfesting av feilkjeldene, talfesting av moglege forbetringar samt at dei gav uttrykk for ein gryande bevisstheit omkring gyldigheitsområdet til modellen.

Det er desse refleksjonane som då til slutt løfta elevane opp på Blomhøj og Jensen sitt siste nivå der elevane var i stand til kritisk å vurdere alle aspekt ved både modellen så vel som utviklingsarbeidet som ligg bak modellen.

Avslutningsvis må det påpeikast at prosessen gjort reie for kapittel 2 på ulike vis representerer ein idealisert prosess. Eg hadde såleis ein forventning om at elevane måtte gå gjennom eit eller fleire trinn i prosessen fleire gonger. Denne forventinga må seiast å være innfridd. Vidare hadde eg og ein forventning om at nokre av elevane ikkje ville klare å gjennomføre heile prosessen. Det var fleire årsaker til dette, til dømes kunne matematikken være for vanskeleg, dei kunne oppleve svikt i programvarene eller oppleve samarbeidsproblem i gruppa. Dette var heldigvis ein forventning som ikkje vart innfridd

Kap 5.2.2: Brousseau frå teori til praksis

Eit modelleringsforsøk som beskrive i kapittel 4 vil, som eg allereie har vore inne på, representere eit brot med den vanlegaste didaktiske kontrakten i matematikkundervisninga. Slik sett vil heile prosessen frå introduksjonen av opplegget ovanfor elevane fram til ferdig utprøvd modell, kunne betraktast som ein adidaktisk situasjon. Dette vil eg grunngje nærare i det følgjande. Vidare vil eg på denne bakgrunnen knytte stega Brousseau identifiserte i den adidaktiske situasjonen opp mot elevaktivitetane gjennom forsøket. Eg vil og komme inn på mi rolle i denne situasjonen og sei litt om konsekvensane den har for min undervisningspraksis.

Kap 5.2.2.1: Forsøket som adidaktisk situasjon.

Innleiingsvis i kapittel 2.4.3.1 hadde vi at

> *«…… for å skape ein læringsprosess må læraren provosere fram den forventa tilpassinga gjennom velovervegde val av problemstillingar han framset ovanfor elevane. Problemstillingane må velgjast på ein slik måte at elevane kan akseptere dei som sine eigne. Dei må få elevane til å handle, tale og tenkje ut i frå sin eigne motivasjon»*

I praksis seier Brousseau her at for at ein fruktbar adidaktisk situasjon skal kunne oppstå må det stillast krav til læraren om at han orienterer seg om forkunnskapane hjå elevane. Resultatet derifrå nyttar han til å enten justere problemstillinga i eine eller andre retninga eller til å sørge for at elevane har dei naudsynte forkunnskapane. Eventuelt kan han gjere begge deler. Poenget her er ei framheving av kor viktige forkunnskapane er. For meg som lærar innebar det at eg måtte ha ei solid oversikt kva elevane kunne om dei forskjellige parametrane som beskriv bølgjerørsle, om bølgjer som fysisk fenomen og om kva nivå dei låg på innan dei naudsynte matematiske områda som algebra, derivasjon og integrering.
Frå same kapittel har vi vidare at:

> *Elevane er kjende med at målsettinga for problemstillinga er ein ny kunnskap som vil oppstå hjå dei.*

I dette låg det ein forventning hjå elevane om at problemet som vart presentert for dei faktisk lot seg gjennomføre av dei. Under gjennomføringa av eit såpass omfattande prosjekt som dette, ville det spesielt innledningsvis oppstå situasjonar som var frustrerande og demotiverande. Dei kunne finne matematikken for abstrakt og vanskeleg, ha problem med programvara eller at modellen dei kom fram til gav dårlege resultat. Sjølv om dei då kanskje ikkje umiddelbart såg vegen vidare ville elevane oftast tolke situasjonen som om problemet låg hjå dei, ikkje i sjølve problemformuleringa. Dernest har vi følgjande:

> *Vidare må elevane ha ein form for kjennskap til at denne kunnskapen har sin bakgrunn i den interne situasjonen problemstillinga gir opphav til og at dei kan konstruere denne kunnskapen utan å ta i bruk noko form for didaktiske resonnement.*

Dette var eit sentralt punkt. Elevane måtte ha ei formeining om at dei skulle utvikle modellen for si eiga læring. Dei måtte være bevisste på at det var dei sjølve som skal lære den aktuelle matematikken. Då gjerne på ein måte som gav auka og meir varig læring enn kva det var

rimeleg å forvente gjennom metodikken innan den opphavlege didaktiske kontrakten. Om dei sat att med ei kjensle av at modellutviklinga kun vart gjort fordi eg som lærar ba dei om det, ville det være vanskeleg å få fram ein god adidaktisk situasjon.
Til sist hadde vi at

> *«Mellom augeblikket eleven aksepterer problemstillinga som si eiga og augeblikket eleven produserer svaret sitt, avstår læraren frå å interferere eller å føreslå vegar til løysinga. Denne situasjonen er det Brousseau kallar den adidaktiske situasjonen.»*

Dette var eit noko stringent krav å stille for forsøket. Det var rett og slett for omfattande til at eg som lærar kunne forvente at elevane kom fram til eit fruktbart resultat på eiga hand. Men då eg heldt mi innblanding på eit minimum gjennom heile prosessen og var bevisst på at all hjelp må verte gitt i ein form som oppmuntra til undring framfor å gje ferdige svar, kunne eg likevel hevde med god tilnærming at kravet til Brousseau var innfridd.

Kapittel 5.2.2.2: Den adidaktiske situasjonen i teori og i praksis

i) Den delegerande situasjonen:

Dette var situasjonane som oppstod heilt innleiingsvis når eg hadde delt klassen inn i grupper og etter kvart fått gitt elevane den naudsynte informasjonen dei trong for å kome i gang med utviklingsprosessen av forsøket. Ein kunne då observere ein lågmælt idémyldring der elevane både kom med idear til korleis dei skulle gå fram samstundes med at dei prøvde å forstå kva oppgåva eigentleg gjekk ut på. Det var med andre ord ein noko uoversiktleg og lett kaotisk situasjon. Sidan gruppene fungerte såpass bra som dei gjorde vart situasjonen rimeleg fruktbar og kunne seiast å leve opp til tankane Brousseau gjorde seg.

Om gruppene derimot ikkje hadde fungert så godt, hadde det vore ein reell risiko for at denne situasjonen vil kunne framstå som både forvirrande og unødig vanskeleg. Elevane ville kunne ha opplevd at heile prosjektet verka så stort og innehaldt såpass mange ukjende faktorar at dei vart sittande att med eit kjensle av å være overvelda med ein mangel på vidare motivasjon som resultat. Det villle då ha vore avgjerande viktig at eg identifiserte og følgde opp slike situasjonar, noko og Brousseau var inne på. Ein førebyggande strategi frå mi side ville ha vore gje informasjon om prosjektet i små men hyppige bolkar der det lot seg gjere.

ii) Den handlande situasjonen

Dette var situasjonen som oppstod etter, og som ein konsekvens av den delegerande situasjonen. No hadde elevane i meir eller mindre grove trekk klart for seg korleis dei skal gå fram for å løyse oppgåva. Dei hadde komme over den kritiske terskelen manglande matematikkunnskapar representerte. Vidare omhandla aktivitetane no hovudsakeleg ei nedbryting av sjølve oppgåva inn i mindre deloppgåver og heile situasjonen bar preg av idemyldringar og oppgåvefordelingar. Mi rolle i denne situasjonen var meir tilbaketrekt og likna meir på rolla til ein rettleiar heller enn den klassiske lærarrolla. Den viktigaste oppgåva mi var å ta vare på entusiasmen hjå elevane. Samstundes måtte eg passe på at elevane heldt fokus på oppgåva. Eg måtte og prøve å halde forslaga deira til løysingar på eit realistisk nivå i den forstand at dei faktisk lot seg gjennomføre. Vidare var det svært viktig at eg var merksam på å få med alle elevane med som deltakarar i denne situasjonen. Om elevane fall av her, ville prognosane for ei vellykka gjennomføring av prosjektet være små. Målet for denne situasjonen var todelt:

a) At den munna ut i ei meir eller mindre gjennomførbar prosjektskisse eventuelt ein arbeidsplan for gjennomføringa av prosjektet.
b) Ein begynnande matematisering og modellutvikling.

iii) Formulerande situasjonar

I denne situasjonen hadde elevane for alvor forutsetningar for å formulere modellane sine og til fullt ut klare å formulere strategiane som var naudsynte for å fullføre oppgåva. Dei hadde no utvikla det naudsynte begrepsapparatet til å gjere problemstillingane til sine eigne, og dei var i stand til å kommunisere seg i mellom med bruk av relevante faguttrykk.

iv) Den validerande situasjonen

Her skulle elevane etterprøve resultata modellane deira gav. Dei prøvde å identifisere feilkjelder og i korleis dei påverka resultata. Dei var i stand til å vurdere kvarandre sine arbeid og vurdere dei opp mot kvarandre.

Dei opplevde at dei må fleire rundar i modelleringsprosessen. Fleire gonger var den einaste måten å finne ei løysing på eit gitt problem ved hjelp av prøving og feiling. Dei kjente likevel no modellane såpass godt, i tillegg til at dei hadde ein såpass god kjennskap til matematikken bak, at det ikkje representere alvorlege utfordringar.

v) Den institusjonaliserande situasjonen.

Denne siste situasjonen oppstod når elevane aksepterte den nye kunnskapen som enten heilt ny eller som erstatning for tidlegare kunnskap. Eit viktig moment her var at institusjonaliseringa av kunnskapen ikkje nødvendigvis skjedde når elevane sjølve er nøgde med modellen sin. For dei fleste av gruppene skjedde det først når eg som lærar hadde gitt mi godkjenning av resultatet. Elevane sjølve reflekterte lite og ingenting over denne situasjonen. Dette heng saman med erfaringane dei har ifrå nær all tidlegare skulegang at eit resultat ikkje er verifisert før læraren har gjennomgått det og godkjent det.

Elevane hadde likevel no tileigna seg ein kunnskap om bølgjer, differensiallikningar og samanhengen mellom desse, og var no i stand til å bruke denne kunnskapen til å tileigne seg ny kunnskap innan beslekta område av matematikken og fysikken.

Kapittel 5.3:Funn og observasjonar

Gjennomføringa av prosjektet kunne delast inn i tre distinkte fasar:

- gjennomgangen av teorien rundt ordinære, homogene, andre-ordens differensiallikningar,
- bygginga av svingeriggane med måleutstyr og gjere målingar
- arbeidet med å utvikle modellen.

Den siste fasen innebar å finne overgangen mellom teorien frå første fasen og dei fysiske målingane frå andre fasen.På denne bakgrunnen vil eg først gjere reie for korleis eg organiserte elevobservasjonane, før eg i det vidare gjer reie for dei tre ulike fasane kvar for seg. Avslutningsvis vil eg komme inn på resultata frå spørjeundersøkinga og intervjua.

Kapittel 5.3.1: Klasseobservasjonane

Kapittel 5.3.1.1: Bakgrunnsinformasjon

Elevgruppa besto av i alt 12 elevar fordelte på 4 like store grupper. Den totale tilgjengelege tida var lik, 12 timar; men tida gruppene brukte på kvar av fasane var ulik. Under observasjonane, såg eg først og fremst etter utsegner og oppførsel som kunne sei meg noko om korleis elevane opplevde både dei ulike fasane kvar for seg, så vel som korleis dei opplevde det samla prosjektet. Eg definerte meg såleis eit sett med indikatorar som eg prøvde å kjenne att under observasjonane. Desse førde eg inn i eit observasjonsskjema eg sjølv utvikla.

Gruppe	06.sep		
L-V-E-J	Spørsmål/aktivitet	Rolege, men følgjer med og tar notat	
	Stemning i gruppa	Følgjer bra med til å begynne med, fell av etterkvart	
	Tal kommentarar	5	0

Døme på observasjonar i ei gruppe. Raud bakgrunn indikerer negative kommentarar, grøn positive

Kodinga brukt i observasjonsskjemaet hadde få kategoriar; positive /negative utsegner om forsøket, generell stemning i klassen, innan kvar gruppe i tillegg til kommentarar rundt einskildelevar som på eit vis stakk seg ut. Årsaka til dette var at det vart for vanskeleg å rettleie elevane samstundes som eg skulle gjere observasjonar dersom klassifiseringa av observasjonane inneheldt for mange kategoriar. I omgrepet «stemning i gruppa» la eg faktorar som humøret til elevane, initiativet hjå elevane til på eiga hand å ta fatt på dei naudsynte arbeidsoppgåvene samt stemninga rundt situasjonane når elevane utførde desse arbeidsoppgåvene. I tillegg til observasjonane i kvar gruppe gjorde eg og nokre oppsummerande betraktningar rundt timen, samt at eg summerte talet på dei fargekoda kommentarane. Her gav eg tala på negative kommentarar negativ talverdi.

Generell stemning		Veldig varierande stemning i dag. Alle jobbar bra, men spesielt D-H-M slit framleis med å få fram eit brukande resultat. D-Så-Jn er rimeleg frustrerte over problema med målingane.	
Sum kommentarar	-13	24	11

Døme på oppsummerande betrakningar. Denne frå timen 21 september 2016.

Raud bakgrunn indikerer negative kommentarar, grøn positive

Eg ville på dette viset kunne støtte opp vurderingane mine av den generelle stemninga ved å sjå på talet på negative kommentarar i høve til talet på positive kommentarar. Sjølv om det ikkje alltid var ein positiv korrelasjon mellom desse to observasjonane, stemte dette bra i langt dei fleste av timane, nærare bestemt 10 av dei 12 timane. Ein konsekvens var såleis at eg kunne bruke høvet mellom talet på positive og negative kommentarar som ein indikator på den generelle stemninga i klassen. At det var såpass få elevar i klassen og at dei i tillegg arbeidde i grupper, forenkla observasjonsarbeidet merkbart. Det var til tider berre 4 «einingar» å observere. Begge desse momenta var såleis med å kvalitetssikre observasjonane mine.

Kapittel 5.3.1.2: Fase ein: Innlæring av teori

Desse timane var organiserte som tradisjonelle matematikktimar med tavleundervisning og oppgåveløysing. Eg gjorde det klart frå starten ovanfor elevane at det var ein føresetnad for eit vellykka prosjekt at dei klarte å tileigne seg desse forkunnskapane. Eg poengterte og fleire gonger at dette var matematikk henta direkte ut i frå R2-pensumet. Då samtlege av elevane tok det kurset, ville dei altså måtte gå gjennom denne teorien uansett og om dei gjennomgjekk den no, ville dei og sjølvsagt ha ein stor fordel. Eg gjorde eit nummer av desse to poenga avdi eg var klar over at elevane ville møte til t.o.f. timane med ein forventning å gjere noko anna enn å gjennomgå matematisk teori. Denne brotne forventninga til innhaldet i timane representerte såleis eit første brot med den gjeldande didaktiske kontrakten. At dette var ein kontrakt gjeldande i eit anna fag enn matematikk, medførte at brotet ville kunne betraktast som ein alvorleg feilkjelde. Dette vert såleis eit viktig moment å ha i bakhovudet både under observasjonane så vel som i den seinare analysen av funna.

Etter mitt skjønn var den klart mest sentrale observasjonen eg gjorde i denne fasen at elevane brukte mykje lenger tid på å opparbeide seg den grunnleggande og naudsynte matematikk-kompetansen enn kva eg hadde forventa. På bakgrunn av at eg brukte 3 timar på temaet i forrige skuleår når eg gjennomførte eit meir tradisjonelt undervisningsopplegg, og kun brukte tre timar i piloten, hadde eg opprinnleg planlagd å bruke inntil 4 timar no. Det viste seg at eg måtte bruke mellom 5 og 7 timar. Elevane var etter det eg observerte, lite villige til å arbeide med stoffet endå dei forsikra meg fleire gonger om at dei likte å arbeide med matematikk. Eg opplevde at dei møtte til andre teoriøkt totalt ubudde og at dei ikkje hadde gjort noko som helst form for lekser. På spørsmål frå meg, vedgjekk dei at dette ville aldri skjedd i ein «vanleg» matematikktime.

«*Dette skulle jo være en t.o.f.-time», (*Teknologi og Forskingslære, min kommentar).

«Hadde jo gjort leksene hadde det vært en ordentlig mattetime»,

«Vi skal jo ikke akkurat ha en prøve om dette da.»

Det er svært nærliggande å anta at årsaka til desse reaksjonane ligg i den brotne kontrakten gjeldane for teknologi og forskingslære.

Generelt sett var det rimeleg dempa stemning i klassen, spesielt i dei første 3 timane. Motivasjonen for å halde fram var liten, noko som gjenspegla seg i kommentarar som

«Det var jo ikkje dette vi gjøre i tof `en» og

«Kan vi ikkje gjøre noe annet enn dette?»

Dette gjenspegla seg naturleg nok i talet på negative kommentarar:

Generell stemning		Tungt i dag. Lite villige til å gjere noko som helst. Stemninga forverra sidan i går, Er nøydd å la dei gjere noko anna. Minst 3 elevar ser ut til å ha gitt heilt opp å forstå matematikken	
Sum kommentarar	-24	29	5

Dei oppsummerande observasjonane etter andre timen med teorigjennomgang 7.september.

Etter 4 timar teori, var det ingen av gruppene som hadde tileigna seg tilstrekkelege kunnskapar til at ein vellykka modellering ville kunne finne stad. Gruppa som sleit mest var så nær ved å gje opp, at eg såg meg nødt til å sitte ilag med dei ein heil time for å hjelpe dei vidare. Sidan den generelle motivasjonen for prosjektet var såpass dårleg på dette tidpunktet, tok vi ein teoripause og tok til å bygge svingeriggane dei skulle bruke til målingane sine. (Eg kjem tilbake til denne fasen i neste delkapittel.) Dette hjalp monaleg på stemninga. Den fagleg svakaste valde likevel å halde fram med teorien, då dei *«vil vente til vi skjønner noe»*.
Dei utsett bygginga i to timar.
To av gruppene å forstod matematikken godt nok til at dei begynte å sjå konturane av ein samanheng mellom differensiallikningane i bøkene og pendlane dei held på å lage

A-D-O	Spørsmål/aktivitet	I god gang med riggen. Intense diskusjonar om fjørfestet og storleiken på riggen. Tek til å gruble på praktiske problem rundt målingane	
	Stemning i gruppa	Veldig ivrige. Nøgde med å gjere noko praktisk. Lett og spøkefull tone.	
	Tal kommentarar	3	17

Døme på observasjonar av ei av gruppene som hadde knekt den matematiske koden etter første timen med praksis. Denne frå 13.september 2016

Desse to gruppene kunne såleis gå i gang med sjølve modelleringsprosessen.
Den siste gruppa kom og i gang med bygginga denne tredje dagen, men dei vedgjekk at dei ikkje hadde heilt kontroll på matematikken.

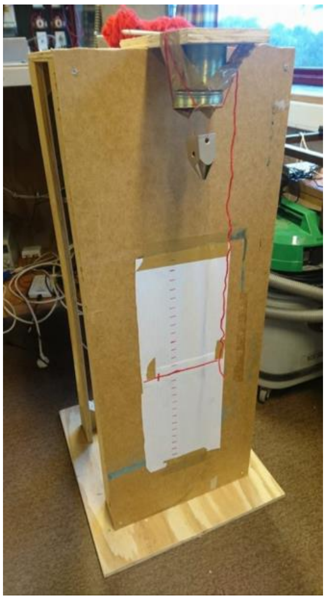
Kapittel 5.3.1.3: Fase to: Bygging av svingeriggar

Denne praktiske fasen av forsøket var, i motsetning til den forrige fasen overstått på kortare tid enn kva eg forventa. Forventningane mine til tidsbruken var basert på erfaringane mine frå 9 års undervisning i teknologi og forskingslære. Den tilsa at all praktisk verksemd tar lang tid. Eg hadde difor sett av 6 timar til denne fasen. Det viste seg å være nok med mellom to og tre. Den opprinnlege tanken med forsøket når det skulle utførast i to ordinære R2-timar, var at eg skulle lage ein svingerigg, og så skulle elevane gruppevis gå inn og gjennomføre dei naudsynte målingane. Når eg no såg meg nøydd til å flytte heile prosjektet over i teknologi og forskingslære, hadde eg mykje meir tid til rådigheit. Eg lot difor elevane få bygge dei sjølve slik at dei på den måten fekk eit heilt anna eigarskap til forsøket. Stemninga blant elevane var no svært god. Aktivitetsnivået var høgt og bar preg av ein stor vilje til å finne løysingar på problema som oppstod.

Generell stemning		Bra flyt hjå alle i dag. God progresjon. D-H-M slit likevel framleis med å få gode avlesingar. Skal få låne sensoren til Di. God stemning også i dag.	
Sum kommentarar	**17**	15	32

Oppsummering av timen15.september.

Typiske problem var å feste fjøra godt nok til at den ikkje roterte, få riggen stiv nok til at den stod stødig, lage gode nok fester til mobilane og å få avstandsskalaen på bakveggen tydeleg nok. Sjølve riggane besto av ei form for ramme med ei metallfjør hengande vertikalt som hadde eit kjegleforma lodd i nederste enden. Sjå figuren nedanfor.



Døme på svingerigg

3 av dei 4 gruppene planla å gjennomføre målingane sine ved å filme svingerørsla med mobilkamera mot ein skalert bakgrunn, for så etterpå sjå gjennom filmen bilete for bilete og lese av samsvarande verdiar mellom tid og utslag. Den siste gruppa brukte ein ultralyd-sensor dei styrte ved hjelp av ein arduino-kontrollar. Byggefasen gjekk veldig greitt. Elevane fann praktiske løysingar utan min intervensjon. På same problemet kunne fleire forskjellige løysingar verte utarbeidde, og desse vart forbetra etter kvart som forsøket skreid fram. Dette kunne eksempelvis være korleis ein festa fjøra i toppen av svingeriggen eller korleis feste

telefonen når dei skulle filme rørsla. Dei som var sist ferdige brukte idear frå dei som var ferdige med sine riggar.

Kapittel 5.3.1.4: Fase tre: Utviklinga av modellane og parametrane

Avhengig av tida dei hadde brukt på å lære seg den matematiske teorien, hadde dei ulike gruppene no mellom 5 og 7 timar til å ferdigstille prosjekta. Det viste raskt at modelleringa var meir utfordrande enn forventa av både meg og elevane. Den relativt lange tida viste seg såleis tilsvarande raskt å være noko knapp.

For det første verka det som elevane hadde problem med å overføre det dei hadde lært om differensialligningar i teoridelen til den praktiske delen av forsøket. Dette gav seg utslag i utsegner som:

«Hva i all verden har disse q`ene og p`ene med fjæren å gjøre», eller

«Jeg forstår absolutt ingenting nå, og jeg hadde jo full ro på greiene når jeg regnet oppgavene» og

«Hvor i all verden er pendelen inni alt dette her».

For det andre opplevde elevane ein del reint tekniske avgrensingar med programvare og med dei konkrete målingane. I denne situasjonen var følgjande utsegner representative for frustrasjonen fleire følte:

«Resultatet ser jo helt vilt ut, det stemmer jo ikke litt engang» eller

«Går helt i surr med all disse bokstavene og variablene» og *«Hvor mange ganger har vi prøvd nå? Det stemmer jo aldri»*

Eg kjem nærare inn på dette i kapittel 6.1.3.

Og for det tredje hadde dei problem å kjenne att den ferdige modellen som ein matematisk modell. I to av dei 4 gruppene lurte elevane på kva dei skulle gjere når dei hadde kome fram til den endelege funksjonen. Dette trass i at elevane i begge gruppene ikkje hadde problem med å løyse oppgåvene i læreboka.

Døme på utsegner:

«*Hæ? Er det der en modell liksom?»,*

og

«Er vi ferdige?».

Dette medførte naturleg nok at det vidare arbeidet fram mot å bestemme parametrane i differensiallikninga vart problematisk. Den viktigaste konsekvensen av dette var at elevane brukte betydeleg lenger tid på denne fasen enn kva eg hadde trudd på førehand.

Vidare opplevde dei at spesielt resultata dei fekk for fjørkonstanten stemte dårleg med kontrollmålingane. Desse kontrollmålingane vart utførte ved hjelp av mekaniske kraftmålarar og måleband. Dei målte samhøyrande verdiar for trekkraft og utstrekking av fjøra og fann fjørkonstanten med Hooke si lov. Årsaka til desse problema ligg i at den utrekna verdien for fjørkonstanten er svært avhengig av verdiane til datasettet ein bruker, noko eg var inne på i kapittel 4.3.3. Datasetta var såleis for unøyaktige. Bakgrunnen for mangelen på nøyaktige resultat ligg hovudsakleg i korleis kamera vart festa til svingeriggane. Dei var festa slik at dei filma rett inn mot nullpunkta til svingingane. Dette medførte at dess lenger ut mot endepunkta lodda befann seg, dess meir unøyaktig vart avlesingane. Den noko avdempa stemninga det aukande frustrasjonsnivået førde med seg, gjenspegla seg naturleg nok i talet på negative kommentarar som vart observerte.

Generell stemning		Veldig varierande stemning i dag. Alle jobbar bra, men spesielt D-H-M slit framleis med å få fram eit brukande resultat. D-Så-Jn er rimeleg frustrerte over problema med målingane.	
Sum kommentarar	**-13**	24	11

Oppsummerande kommentarar etter timen 21.september.

Ein ikkje ubetydeleg negativ konsekvens av tidspresset på slutten var at fleire av elevane meinte dei ikkje hadde fått fram eit så bra resultat som dei hadde ambisjonar om.
Døme på kommentarar var*:*
«Det ble ikke så bra som vi hadde trodd. NN fikk det jo mye bedre til» og
«Det ble jo sinnsykt stress nå på slutten. Tror ingen av oss hvertfall visste hva som var hva på slutten der.»
Vidare førte det med seg at det vart frustrasjonen dei opplevde dei siste tre til fire dagane som vart sittande att som hovudinntrykket av det tre veker lange prosjektet:
«Mest stress nå syntes jeg.» eller
«Mye pes, spesielt nå på slutten» og
«Tror ikkje det var verdt alt stresset på slutten»

Kapittel 5.3.1.4.1: Nokre illustrerande døme

Etter det som er sagt ovanfor, må det påpeikast at samlege grupper kom i mål til slutt.
Når eg i det følgjande trekkjer fram ei rad dømer frå arbeida til elevane, er det både for å eksemplifisere dette og for å vise litt av prosessen fram mot ulike delmål.
I all hovudsak var kvaliteten til modellane såpass god at dei fekk bra samsvar mellom utrekna

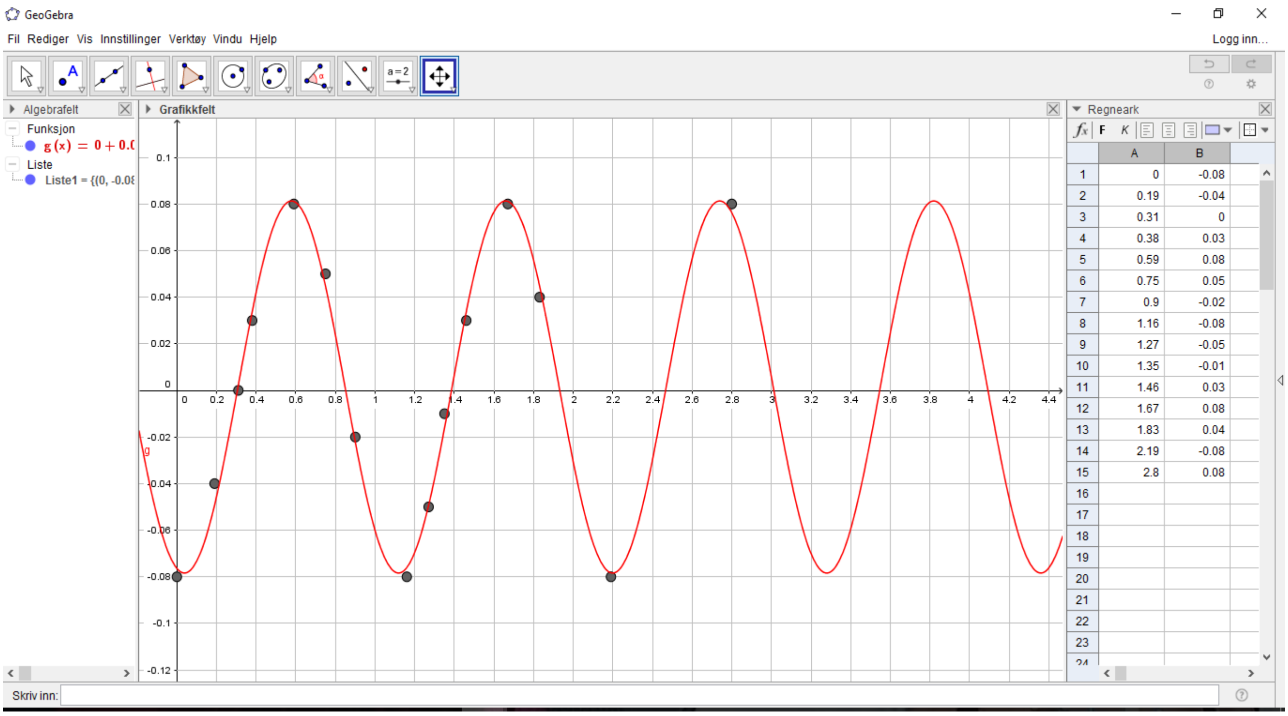
resultat og målt resultat. Dette gjaldt spesielt for utrekninga av fjørkonstanten. I andre delen av forsøket, der dei skulle finne ein verdi for dempingsleddet, utfordra eg elevane til å finne metodar å etterprøve resultatet på. Tre av gruppene var nøgde med å finne ein modell der frekvensane , dvs parameteren q i likningane, samsvarte med målingane. Desse hadde i realiteten ingen eksplisitt etterprøving av verdien for dempinga. Berre ei gruppe kom på å samanlikna kor lang tid det tok før utslaget var tilnærma lik 0 cm ut i frå modellen med ein faktisk måling. Dette er vist i døme 3 nedanfor.

<u>Døme 1:</u>

Dette er eit døme på ein vellykka utrekning av fjørkonstanten ut i frå måledata framkome ved tilnærminga til den udempa svinginga:

Når vi plotter verdiene fra målingene inn i geogebra og bruker RegSin, får vi:

$f(x) = 0.0013 + 0.0795 sin(5.8156x - 1.7947)$



Formelen er oppført på formen $y = A + D * sin(qx + E)$ hvor $q = \sqrt{k/m}$

A og E gir oss en forskyvning av kurven, som kommer av unøyaktige målinger og når vi startet målingene. Disse kan vi se bort ifra.

Formelen for høyden til loddet blir gitt med:

$y = D \cdot sin(qt)$ hvor t er tid

k er fjærkonstanten

$q = \sqrt{k/m}$

$f(t) = 0,0013 + 0,0795 \cdot sin(5,82t - 1,79)$

$q = 5,82$

$m = 0,177kg$

$k = 5,82^2 \cdot 0,177$

$k = 6,00N/m$

Formelen uten demping gir oss denne differensialligningen:

$my'' + ky = 0$

$0{,}177kg \cdot y'' + 6,00N/m \cdot y = 0$

Etter kontrollmåling av fjørkonstanten k, finner vi at $k = 5,2\ N/m$

Fagleg kommentar:

Dette er som eit døme der elevane kom fram til eit resultat frå modellen som i stor grad samsvarte med resultatet frå kontrollmålingane. Til synelatande har dei svært god kontroll på matematikken. Dei nemner mellom anna heilt korrekt at faseforskyvinga, av dei kalla E, og likevektslinja, kalla A, sine funksjonar er ein «*forskyvning av kurven*». Dette styrkar inntrykket om god kontroll. Men så held dei fram med «*….som kommer av unøyaktige målinger og når vi startet målingene.*» Dette indikerer at dei ikkje heilt har forstått verken kvifor desse parametrane er med i uttrykket for modellen eller kva rolle dei spelar.

Dei ser heller ikkje at uttrykket som Geogebra gir er ein cosinusfunksjon. Dette er meir forståeleg av to grunnar. For det første gjennomfører Geogebra ein regresjon med sinusfunksjonen, og ikkje cosinusfunksjonen. For det andre hadde elevane enno ikkje lært korleis dei skulle skrive om eit sinusuttrykk av dette slaget om til eit cosinusuttrykk.

Denne manglande matematikkforståinga hindrar dei likevel ikkje i å gjennomføre heile modelleringsprosessen fram til eit godkjent resultat. Med andre ord er det belegg for å hevde at dei har nådd det mest avanserte nivået hjå både Blomhøj & Jensen så vel som hjå Brousseau.

Døme 2:

Kontroll av fjørkonstant.

Målt for hånd

F	0	0.717	0.894	1.041	1.257	1.473
x	0	10	12	14	17	20.5
k	0	7.1686	7.4468	7.4351	7.3939	7.1854

Snitt fjærkonstant: 7.325 N/m

Fagleg kommentar:

Dette dømet er tatt med berre for å vise eit resultat frå kontrollmålingane av fjørkonstanten til ei anna fjør enn den i førre døme.

Døme 3:

Dette dømet viser korleis dei kom fram til ein verdi for dempingsleddet μ :

For å finne dempingen i svingningene må vi finne μ i ligningen under.

$m \cdot y'' + \mu \cdot y' + k \cdot y = 0$

$mr^2 + \mu r + k = 0$

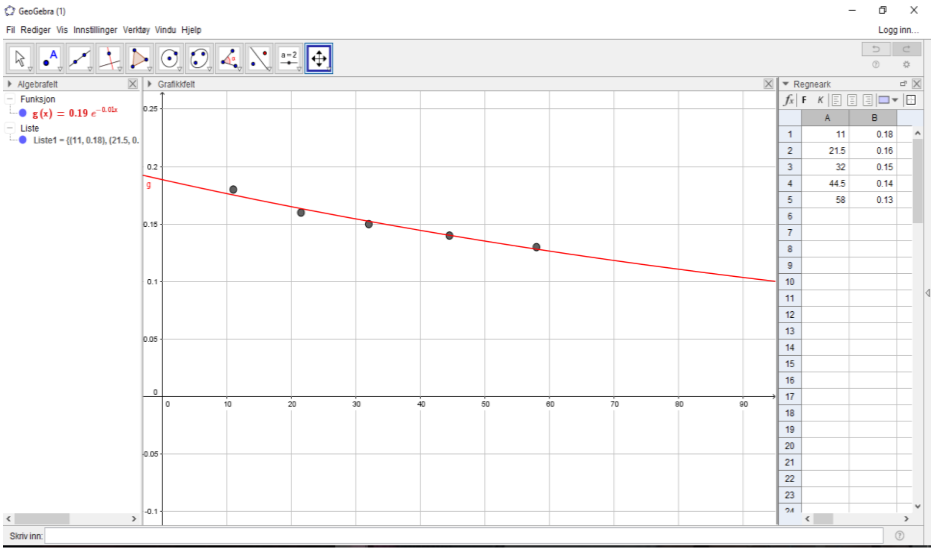
$$r = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4m \cdot k}}{2m}$$

$$r = p \pm q\sqrt{-1}$$

$$p = \frac{\mu}{2m}$$

$$\mu = -p \cdot 2m$$

p regnet vi ut med å finne flere toppunkter over flere perioder, og brukte regresjon for finne $e^{px} = e^{-0,01x}$



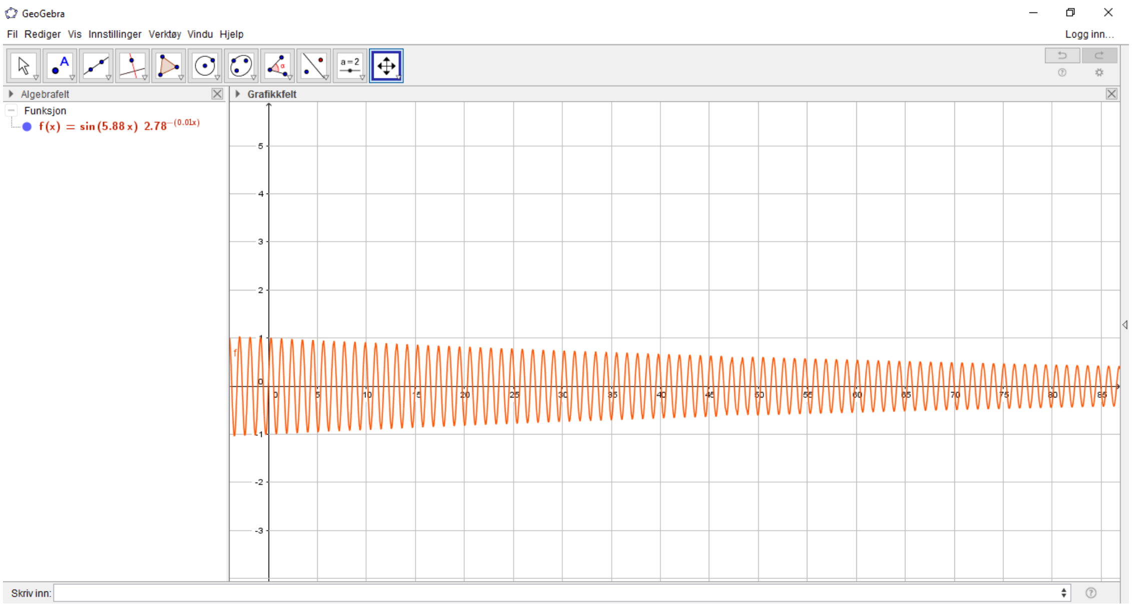
$p = -0{,}01$

Modellen for den dempede svingingen blir da:

$y(t) = e^{-0{,}01t} * \sin(5{,}88t)$.

I følge denne modellen ville det ta ca 460 sekunder før utslaget var på 1 cm. Vi kom til 448 sekunder når vi målte.

I Geogebra ser den slik ut:



Vi vet allerede m og k, og får denne differensialligningen for dempet svingning

$$\mu = -(-0{,}01)\cdot 2\cdot 0{,}177$$
$$\mu = 3{,}54\cdot 10^{-3}$$

$$m\cdot y'' + \mu\cdot y' + k\cdot y = 0$$

$$0{,}177\cdot y'' + 3{,}54\cdot 10^{-3}\cdot y' + 6{,}13\cdot y = 0$$

<u>Fagleg kommentar:</u>

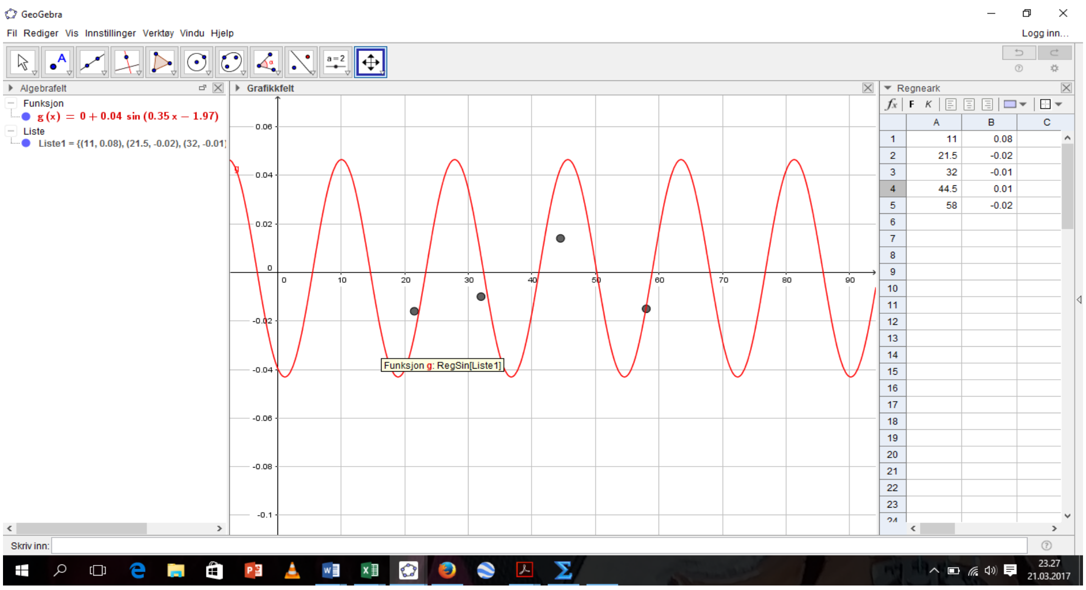
Her har elevane tidlegare kome fram til ein fjørkonstant på 6,13 N/m og ein verdi for q på 5,88 s^{-1}. Vidare tyder både bruken av Geogebra og bruken av algebra på ein svært god kontroll på matematikken. Dei ser ut til å ha oversikt over dei fem parametrane som inngår og vekslar uproblematisk mellom variabelen y og hjelpevariabelen r. I tillegg har dei kome fram til ein elegant måte å etterprøve modellen på. Denne kom dei fram til utan mi hjelp.

I sterkara grad enn i førre døme, er det her all grunn til å hevde at dei har nådd det reflekterande nivået hjå Blomhøj & Jensen eventuelt den institusjonaliserande situasjonen hjå Brousseau.

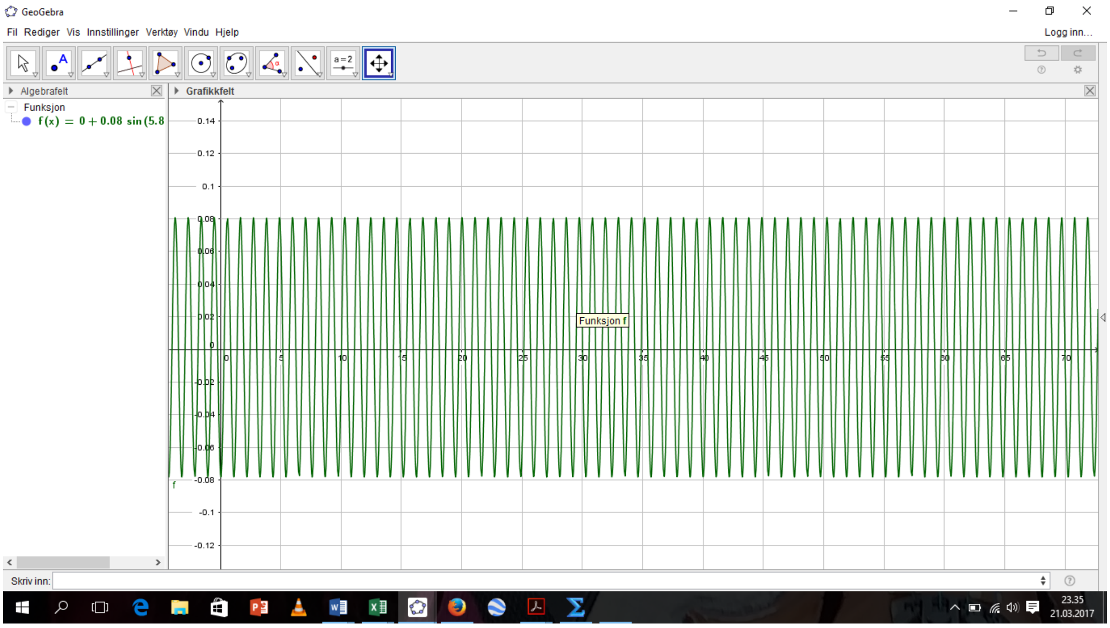
<u>Døme 4:</u>

Her eit døme på såkalla aliasing, dvs at sinusfunksjonen fekk for låg frekvens grunna for låg samplingsrate :

> Først så skjønte vi ingenting. Grafen til funksjonen vår hadde altfor liten frekvens. Etter hvert forstod vi at det var fordi vi hadde for få målinger.
>
> Grafen vår så først slik ut :



Med mange nok målinger så den slik ut:



Og nå stemte den mye bedre med observasjonene våre

<u>Fagleg kommentar:</u>

Innleiingsvis ser vi at gruppa opplevde at førsteutkastet til modell gav svært dårleg samsvar med observasjonane. Under forsøket grubla dei lenge internt i gruppa over mogeleg årsaker. Det enda opp med at dei ba meg om hjelp. Ut i frå det som er skreve er det rimeleg å hevde at elevane på dette stadiet befann seg på nivå tre hjå Blomhøj & Jensen, det så kalla matematiserande nivået. Frå kapittel 3 har vi at dette nivået vert m.a. kjenneteikna av at:

> «….representere det første utkastet til ein matematiske modell. Elevane kan risikere å oppleve at resultatet frå det førre nivået resulterte i ein modell som ikkje lar seg bruke.»

og

> « Modellen er framleis uprøvd, men no er overføringa av konkret situasjon til matematikk i utgangspunktet gjennomført»

Medan hjå Brousseau vil dette tilsvare at elevane befinn seg i den formulerande situasjonen:

> « Dei vil no ha utvikla det naudsynte begrepsapparatet til å gjere problemstillingane til sine eigne, og dei vil være i stand til å kommunisere seg i mellom med bruk av relevante faguttrykk.»

Når dei hadde forstått problemet med aliasing og gått ein nu runde med å utvikle modellen sin, ser vi at dei kjem fram til eit resultat dei er nøgde med. Denne gruppa føretok aldri noko systematisk etterprøving av modellen sin. Det kan såleis hevdast at dei vart sittande fast på konkluderande nivået / i den validerande situasjonen:

«**Det konkluderande nivået**

Dette er nivået som gir oss resultata frå modellen. Her vil elevane analysere modellen og ein vil få dei første konkrete resultata.»

og

«Den validerande situasjonen

Her vil elevane presentere dei første utkasta til løysingar på problemet. Utkasta vil verte etterprøvde og eventuelt justerte.»

Kapittel 5.3.2: Om spørjeundersøking og intervju

Kapittel 5.3.2.1: Om bakgrunn og intervjuguide

Spørjeundersøkinga tok utgangspunkt i resultata frå piloten. Det var ei målsetting både å halde talet på spørsmåla lågt, og å formulere spørsmåla opne. Årsaka til det første er at elevane gjennom spesielt det siste skuleåret, allereie møter svært mange spørjeskjema frå ulike hald. Dette er skjema knytte til læringsmiljø, psykisk helsevern, rus, russetid, eigenvurdering osv. I piloten hadde eg inntil 6 spørsmål. På bakgrunn av tilbakemeldingane frå dei deltakande elevane, reduserte eg talet til 4. Eg ville ha opne spørsmål for å gje elevane rom til å reflektere rundt svara sine og såleis få ei betre innsikt i reaksjonane deira.

I tillegg til å være ei kjelde for utfyllande data, utgjorde spørreundersøkinga eit utgangspunkt for intervjua. Intervjuguiden var såleis basert på spørsmåla utarbeidd til spørjeundersøkinga og på reaksjonane eg observerte under piloten. Intervjudelen av datainnsamlinga var aldri tenkt å være omfattande. Heilt i frå starten var tanken å halde intervjua korte, då dei var tenkt å ha som hovudoppgåve å fungere som ein kvalitetskontroll av svara gitt i spørjeundersøkinga. Årsaka til denne tanken var at eg meinte, og for så vidt enno meiner, at eg gjennom klasseromsobservasjonane og gjennom spørjeundersøkinga ville ha eit rikt nok datamateriale. Når det er sagt ville eit intervju kunne gje svar på spørsmål som dei to andre datasetta ikkje ville klare å gje svar på. Intervjua hadde eit fokus på reaksjonane til elevane etter dei hadde gjennomført forsøket. Det vart gjennomført intervju med tre elevar. Den eine eleven var med i ei gruppe som gjennomførde forsøket tilsynelatande greitt og som i tillegg fekk gode karakterar.

Den andre kom frå ei gruppe som opplevde til dels betydelege utfordringar undervegs, men som likevel klarte å oppnå gode resultat både med modellen og karaktermessig.

Den siste eleven vart vald ut på bakgrunn av at han ut i frå mine observasjonar opplevde forsøket såpass utfordrande at modellen gruppa hans kom fram til var nær ubrukeleg i praksis.

Intervjua vart utførde i løpet av veka etter dei hadde levert rapportane frå forsøket, og dei varte i ca ti minutt. Under intervjua var det essensielt å halde fokus på kva intervjuobjekta faktisk sa. Eventuelle forventningar til svara deira eg eventuelt hadde, var moment eg måtte ta omsyn til seinare.

Kapittel 5.3.2.2: Resultat frå spørjeundersøkinga

Det første spørsmålet i spørjeundersøkinga dreidde seg om i kor korleis elevane vurderte læringsutbyttet ifrå prosjektet samanlikna med det dei forventa ved gjennomføring av eit tradisjonelt undervisningsopplegg.

Spørsmål 1: På bakgrunn av erfaringane dine frå tidlegare matematikkundervisning der du har gjennomgått noko som du tykte var vanskeleg, vil du sei du har lært meir, mindre eller like mykje som du ville ha gjort om du skulle ha lært om differensiallikningar på vanleg vis?
Spørsmål 2: Kan du peike på nokre forskjelar mellom denne måten å lære på og den vanlege måten som bidreg til svaret ditt på spørsmål 1)? a*rbeidet i grupper* *lang tid på ein del av matematikken* *bruken av geogebra* *den umiddelbare praktiske bruken av ny matematikk*
Spørsmål 3: Kan du rangere forskjelane frå spørsmål 2) frå viktigast til minst viktig? Ta gjerne med ein kort grunngjeving.
Spørsmål 4: I kor stor grad var forkunnskapane om differensiallikningar viktige for å gjennomføre prosjektet? Hadde du t.d. klart å utleie svinglikninga på eiga hand?

Spørsmåla stilt i spørreundersøkinga

Typiske svar her var:

«Lærte mer nå»,

«Fann roen når vi hadde så mye tid, så jeg mener absolutt jeg lærte mest nå.»,

«Vanskelig å si siden jeg aldri har hatt om dette før, men jeg tror jeg lærte mest nå.

«Dette var i alle fall gøyere»

Det andre eit oppfølgingsspørsmål der eg ba elevane om å prøve å identifisere kvifor den eine undervisningsmetoden var betre enn den andre.

Eit par dømer på svar:

«Jammen bra vi hadde så god tid», og

«Tiden vi brukte var den viktigste årsaken til i allefall jeg lærte mer nå»,»

«Jeg var heldig og havnet i en bra gruppe, det gjorde alt lettere, men det bra med den gode tiden også»

Det tredje spørsmålet var det berre ein respondent som hadde teke seg bryet med å svare ordentlig på. Det er såleis for tynt datagrunnlag frå spørsmålet til at det vert teke med i den vidare analysa i kapittel 6.

På det fjerde spørsmålet omhandlande i kva grad dei matematiske forkunnskapane var viktige, var døme på svar:

«Vanskelig å holde oversikten over matten vis vi måtte ha gjort begge deler på en gang.»,

«Viktig å forstå teorien først»,

«Det ville vært mye lettere viss eg hadde kunnet matten skikkelig først.»

«Hadde aldri klart det viss ikke jeg hadde lært om diff.ligninger først»

«Det var jammen bra vi fikk tid til å løse såpass mange oppgaver, ellers hadde det ikke gått»

Ut i frå dei avgitte svara er det såleis for det første belegg for å hevde at elevane opplevde eit auka læringsutbytte samt at den viktigaste årsaka til det større læringsutbyttet var lang tid, ikkje å knytte matten opp mot eit praktisk forsøk.

For det andre kan ein hevde, på bakgrunn av svara og på bakgrunn av tidsmangelen tre av gruppene opplevde, at forsøket neppe hadde latt seg gjennomføre såpass bra som det gjorde om elevane ikkje hadde tileigna seg eit visst minimumsnivå av kunnskap om differensialligningar før dei tok til med sjølve modelleringsprosessen.

Kapittel 5.3.2.3: Resultat frå intervjua

Innleiingsvis må det påpeikast at intervjua ikkje var så fruktbare som eg hadde håpa.

Eg sat att med eit inntrykk av dei på ingen måte var vane med å reflektere over sin eigen læring på det viset som samtalane våre fordra. Dette medførte at det vart til dels vanskeleg å få elevane i tale og at samtalane gjekk rimeleg trått til tider.

Når eg tok til med intervjua var det tre spørsmål eg ville ha svar på. Dei to første var knytt til funna frå spørreundersøkinga:

1) Årsaka til eit eventuelt auka læringsutbytte.

2) Rolla til forkunnskapane i matematikk.

Det tredje spørsmålet omhandla vanskane elevane hadde med å knytte saman den matematiske teorien og den praktiske delen av forsøket. I tillegg var eg interessert i å få høyre kva intrykk dei sat att med frå kvar av dei tre fasane frå modelleringsforsøket.

Om årsaka til auka læringsutbytte:

Oppsummert vart det i endå sterkare grad påpeika kor viktig det var å ha god tid og at dette spela ei mykje viktigare rolle enn sjølve modelleringa gjorde:

Elev C svara:

Meg: Du sa i stad at du meinte du lærte meir matte no enn i ein vanleg time. Klarar du å sei noko om kvifor det er slik?

C: Jaaa,*(Dreg på det.).* Eg tror iaffall at det at vi fikk så god tid var viktig. *(Ivrigare no).*

Meg: Viss du no tenkjer på at du fekk brukt den nye matten med ein gong. Eg meiner, de spør jo heile tida om kortid de får brukt for matten de lærer. Her fekk de jo brukt den med det same.

C: Mye mye viktigere med den gode tiden. Forsøket var mer forvirrende enn nyttig. I alle fall i starten.

Medan elev A svara:

Meg: Kvifor lærte du meir trur du?

A: Vi fikk jo j… god tid då. I en vanlig mattetime har vi det alltid så j…. travelt, får jo aldri tid til å tenke seg om. *(Frustrert ved tanken)*

Meg: Er det berre det at de fekk såpass god tid som spelte noko rolle?

A: Var gøy med byggingen og sånn, men tror ikke vi lærte noe mer matte av den grunn.

Og den tredje eleven svara:

Meg: Trur du at du lærte matten betre no enn viss me hadde hatt ein vanleg mattetime?

B: Vet ikkje. Pleier å lære ny matte fort uansett, så….(*Tenkjer seg om)*
Men kanskje det at vi jobbet så mye med akkurat denne typen matte gjør at eg husker den lenger. Eg vet ikkje…

Rolla til forkunnskapane i matematikk

Her og var svara samstemte i at å ha nådd eit basisnivå innan dei relevante matematikk-kunnskapane var av stor betydning:

Elev A:

Meg: Trur du at de hadde klart å få til dette om me ikkje hadde hatt matten til å begynne med?

A: Aldri verden.

Meg: Kvifor det då?

A: Hadde blitt altfor vanskelig. Da måtte vi jo ha lært oss all den matten på egenhånd først da jo.

Elev B:

Meg: Trur du det var nødvendig å kunne noko om diff.likningar på førehand for at de skulle klare å lage modellane dykkar?

B: Ka mener du? Selvsagt måtte vi kunne om diff.ligninger! Hele greien handlet jo om diff.ligninger.(*Ser på meg som om eg har misforstått noko vesentleg.*)

Meg: Sant nok det, men det eg tenkjer på er: Hadde de klart å lære noko særleg om diff.likningar gjennom eit slikt forsøk viss du ikkje hadde kunna noko om dei på førehand?

B: Å sånn ja. Siden vi har lært om Newton sin andre lov og greier, hadde vi kanskje klart å komme fram til selve ligningen, men ikkje sjans i havet om vi hadde lært oss å løse den bare ved å lage en modell.

Elev C:

Meg: Eg veit de syntes det var lite kjekt med all matten til å begynne med i prosjektet, men sett i ettertid, var det verdt innsatsen?

C: Jaha! (*Med ettertrykk)* Hadde ikkje hatt sjans å fått det til ellers. Det var forvirrende nok selv når vi hadde lært om matten.

Samanhengen mellom praksis og teori

Ein sentral observasjon eg gjorde var som tidlegare nemt at elevane hadde problem med å sjå samanhengen mellom den konkrete svingerørsla til loddet og matematikken gjennomgått kor tid i førevegen. Svara eg fekk her reflekterte nok i stor grad det faglige nivået innan matematikk til dei enkelte elevane:

Elev A

Meg: Når de hadde gjort målingane dykkar, så såg det ut som om det var vanskelig å bruke den nye matten på målingane. Stemmer det eller?

A: Ja definitivt! Vi ble jo helt satt ut av alle bokstavene vi måtte forholde oss til. Og så stemte jo ikke Geogebra med det som stod i boken. Bare surr der en stund. (*Ler godt*)

Elev B:

Meg: Etter at de hadde tatt målingane de trong, kom de fort bort og ba om hjelp, kvifor det?

B: Gjorde vi det? (*Flirer breitt)* Joda, stemmer det. Så vidt eg husker var det noe med at vi ikke fant igjen størrelsene i boken i uttrykket vi fikk fra Geogebra. Men når du forklarte det til oss, gikk resten greitt.

Elev C:

Meg: Det spurde vel så vidt eg hugsar ikkje etter hjelp ein einaste gong før de slo fast at de var ferdige. Var det nokre punkt undervegs som var vanskelegare enn andre?

C: Nei. (*Pause*) Kommer ikke på noen nå i allefall.

Når det gjaldt inntrykka elevane sat at med frå dei tre fasane av forsøket, stadfesta i det store og heile resten av intervjua inntrykka eg hadde gjort meg frå observasjonane av dei tre fasane: Den første fasen med til dels vanskeleg teori vart opplevd som tung og uventa i dette faget. Det var vanskeleg å motivere seg og dei såg ikkje poenget med den nye matematikken.

Den andre fasen vart opplevd diametralt motsett frå den første, og vog i stor grad opp for den første delen. Dette medførte at motivasjonen hjå elevane var god når dei tok fatt på den tredje fasen med utviklinga av sjølve modellane.

Den tredje fasen vart i starten såleis sett på som spennande og interessant, men etter kvart som tida gjekk utan at dei kom fram til eit fornuftig resultat, auka naturleg nok frustrasjonen. For representanten frå gruppa som hadde dei største problema med å komme i mål, var det denne frustrasjonen som sat att som hovudinntrykk av heile prosjektet.

Kapittel 6: Analysar og refleksjonar

I dette kapittelet vil eg analysere funna reiegjort for i kapittel 5.
Eg vil gå gjennom funna frå kvar av datainnsamlingane enkeltvis, før eg til slutt samlar trådane og betraktar det samla datasettet under eitt.
Eit poeng i denne samanhengen er at analysen av klasseobservasjonane vart gjort før noko analyse av datasetta frå spørjeundersøkinga og intervjua vart gjennomført.
Dette var viktig for å forhindre at funn frå desse skulle påverke analysen av klasseobservasjonane.

Kapittel 6.1: Observasjonar under gjennomføring av forsøk

Under klasseobservasjonane mine, var det, som vi såg i forrige kapittel, tre funn eg fann sentrale:
Den første var at tidsbruken var markant lenger enn det eg hadde grunn til å forvente ut i frå piloten og tidlegare undervisningserfaring om temaet.
Den andre var dei uventa utfordringane elevane meinte å støyte på i møtet mellom lærebok-matematikken og det praktiske forsøket.
Den tredje var at i tre av dei fire gruppene hadde elevane problem med å identifisere den ferdige modellen. I det følgjande vil eg reiegjere for kvar av desse observasjonane og frå ulike synsvinklar reflektere rundt moglege årsaker i lys av teorien frå kapittel 2.
I tillegg gjorde eg eit funn av teoretisk karakter:
Samanliknar ein modelleringsprosessen Blomhøj og Jenssen reiegjer for, med Brousseau sin adidaktiske situasjon, er det påfallande kor likt dei er oppbygde.

Tabellen nedanfor oppsummerer dei sentrale trinna, reiegjort for i kapittel 2, for begge prosessane.

Nivå	Blomhøj & Jenssen (Blomhøj & Jenssen 2010)	Brousseau (Theory of the didactique 2008)
1	**Det undersøkande nivået** Her vil elevane reflektere rundt den spesifikke prosessen som skal modellerast. Spørsmåla vil dreie seg rundt tema som kva konkrete storleikar inngår, kva karakteriserer det spesielle fenomenet osv.	**Den delegerande situasjonen** Her er det elevane sjølve som har ansvaret for å fordjupe seg i problemstillinga, og læraren delegerer dette ansvaret til elevane. Elevane akseptere problemstillinga som si eiga. Dei vil her kartleggje naudsynte førehandskunnskapar.
2	**Det systematiserande nivået** Her vil elevane begynne å systematisere og spisse tankane inn mot matematiserings-prosessen. Ein vil ha klart for seg kva fysiske lovar som er aktuelle og såleis vil prosessen på dette nivået munne ut i ein begynnande matematisering av den konkrete situasjonen.	**Den handlande situasjonen** Dette er situasjonen som oppstår like etter, og som ein konsekvens av den delegerande situasjonen. Elevane tek til å søkje etter løysingsstrategiar og evt prøve å dele problemet inn i delproblem. Dei vil og søkje å tileigne seg eventuelle manglande førkunnskapar.
3	**Det matematiserte nivået** Dette vil representere det første utkastet til ein matematiske modell. Elevane kan risikere å oppleve at resultatet frå det førre nivået resulterte i ein modell som ikkje lar seg bruke. Dette kan være fordi det matematiske nivået vert for høgt eller fordi programvara ikkje er kompatibel. Modellen er framleis uprøvd, men no er overføringa av konkret situasjon til matematikk i utgangspunktet gjennomført.	**Den formulerande situasjonen** I denne situasjonen vil elevane for alvor ha forutsetningar til å formulere løysingane sine og til fullt ut klare å formulere strategiane som er naudsynte for å fullføre oppgåva. Dei vil no ha utvikla det naudsynte begrepsapparatet til å gjere problemstillingane til sine eigne, og dei vil være i stand til å kommunisere seg i mellom med bruk av relevante faguttrykk.
4	**Det konkluderande nivået** Dette er nivået som gir oss resultata frå modellen. Her vil elevane analysere modellen og ein vil få dei første konkrete resultata.	**Den validerande situasjonen** Her vil elevane presentere dei første utkasta til løysingar på problemet. Utkasta vil verte etterprøvde og eventuelt justerte.
5	**Det reflekterande nivået** Her vil modellen verte utprøvd. Resultata frå modellen vil verte kontrollert opp i mot empiriske data og aksepterte som fullverdige	**Den institusjonaliserande situasjonen** Denne siste situasjonen oppstår når elevane aksepterer den nye kunnskapen som enten heilt ny eller som erstatning for tidlegare kunnskap.

Som vi ser er tilnærmingane såpass like i strukturen at det kan sjå ut som om tilnærmingane (eller forklaringsmodellane) er ekvivalente. Spørsmålet er då om dei er såpass ekvivalente i sin beskriving av matematiske modelleringsforsøk som den strukturelle oppbygginga kan tyde på? På bakgrunn av innhaldet i tabellen vil eg hevde dei er ekvivalente i tydinga kvart trinn i den ein forklaringsmodellen har sitt samsvarande trinn i den andre modellen.
Dette vil eg underbygge ved å vise at funna frå observasjonane mine kan forklarast like godt

ut i frå begge modellane. Dette betyr ikkje at forklaringsmodellane er like. Brousseau går djupare i den teoretiske bakgrunnen enn den Blomhøj et. al. gjer. Tankane rundt den didaktiske situasjonen vart utvikla i eit forsøk på å løyse det didaktiske paradokset, ikkje spesifikt for å danne eit teoretisk rammeverk rundt modelleringssituasjonar, medan Blomhøj et .al. sine tankar nettopp vart utvikla som teoretiske rammeverk for modelleringssituasjonar. Dette medfører at Brousseau sine idear er meir generelle og kan nyttast som forklaringsmodell i fleire ulike situasjonar enn rammeverket til Blomhøj et.al. Dette vil gjenspegle seg i bruken av modellane når eg gjer reie for funna som er gjorde.

Kapittel 6.1.1: Tidsbruken

Som nemnt i kapittel 4 brukte elevane betydeleg lenger tid på å tileigne seg dei teoretiske kunnskapane enn kva eg hadde sett føre meg.

Som ein første teoretisk forklaringsmodell kan vi ta utgangspunkt i Blomhøj & Jenssen (Blomhøj, Jenssen 2003) sine idear. Vi ser då at elevane vert sittande fast i det undersøkande nivået for lenge. Den naudsynte refleksjonen rundt problemstillingane hadde vanskar med å manifestere seg. Den vidare systematiseringa av relevant informasjon og tankar rundt løysingsstrategiar vil såleis ikkje førekomme så fort som ein hadde håp om.

Med tankane til Brousseau som utgangspunkt, kan ein kan på bakgrunn av utsegner som dei gjengjevne i kapittel 5.3.2.1, hevde at observasjonen tyder på at sjølve fundamentet for den adidaktiske situasjonen ikkje er til stades. Det var få teikn på at elevane tok det naudsynte ansvaret for å fordjupe seg i problemstillinga eller at dei aksepterte den matematiske problemstillinga som sin eigen. Den delegerande situasjonen oppstod derfor ikkje.

Ein meir praktisk retta forklaring kan baserast på utsegnene refererte i kapittel 5.3.1.2. Ut i frå desse er det etter mitt skjønn tydeleg at elevane ikkje tok matematikkundervisninga like seriøst når den føregjekk utanfor dei vanlege matematikktimane. Dei faglege aktivitetane til elevane bar med andre ord tydleg preg av å inneha trekk av den situerte læringa frå kapittel 2.5. Som vi hugsar hevda Skott, Jess og Hansen at læringssituasjonen ikkje berre er bestemmande for sjølve læringsprosessen, den er og avgjerande for karakteren til det som vert lært. (Skott, Jess og Hansen, 2008). Når eg opptrer som lærar i teknologi og forskingslære, har eg ein didaktisk kontrakt gjeldande med elevane. Dette inneber mellom anna at elevane har eit sett med forventningar til korleis eg skal opptre i undervisninga i faget. Om eg då brått opptrer som på eit vis som vil være representativt for ein didaktisk kontrakt gjeldande for ein matematikktime, vil dette representere eit brot med den gjeldande didaktiske kontrakten og såleis ein ny læringssituasjon for elevane. Det vil såleis på denne bakgrunnen ikkje verken være eit uventa eller eit uvanleg fenomen å observere, noko eg og finn belegg for i min eigen praksis. Eg finn det likevel noko overraskande at effekten var såpass sterk på dette nivået all den stund dette er elevar som gjennom erfaringa si med fag som kjemi 1, fysikk 1 og t.o.f. 1 har tatt i bruk matematikk som nyleg er lært i til dels avanserte situasjonar.

Kapittel 6.1.2: Møtet mellom teori og praksis

Etter at elevane hadde klart å nå eit fagleg nivå som sette dei i stand til å løyse oppgåver frå læreboka relativt greitt, skulle dei bruke denne kunnskapen i forsøket. Det kunne då, som nemt i kapittel 5.3.1.4. synast at dei vart usikre og nølande i møtet mellom den matematiske teorien representert ved differensiallikningane, og det praktiske forsøket, representert ved pendelen. Det har sidan innføringa av Mønsterplanen av 1974 vore eit uttala mål i norsk skulematematkk å knytte den opp mot praktiske problem. Tanken var, og er, at ein ved dette både ville hjelpe dei svakare elevane fagleg og hjelpe alle elevar med motivasjonen. På denne bakgrunnen finn eg difor ovanfor nemnte observasjonar noko overraskande.

Som forklaringsmodell for desse observasjonane kan vi igjen nytte både Brousseau og Blomhøj sine rammeverk.

Om vi først vender blikket mot til Blomhøj & Jensen (Blomhøj, Jensen 2003) sin ståstad kan det hevdast at problemet vart for komplisert til at elevane ikkje klarte å identifisere dei relevante fysiske lovene og såleis ikkje makta å få til den essensielle matematiseringprosessen. Det vil sei at ein ikkje klarar å komme vidare frå det systematiserande trinnet i modelleringsprosessen.

Går vi over til Brousseau, så uttrykte eg i kapittel 4.3.1. ein viss skepsis til at eg ville klare å skape ein didaktisk situasjon som låg heilt opp til tankane hans. Til det var situasjonen rundt forsøket for komplisert. I dette legg eg at problema knytte til forsøket ikkje var av ein slik art at ein fruktbar adidaktisk situasjon ville oppstå. Med tanke på dei tre stega i prosessen med å skape ein adidaktisk situasjon i kapittel 2.2.3.2, ville læringssituasjonen rundt forsøksprosessen være for omfattande til at elevane klarte å halde oversikta gjennom prøve- og-feile fasen i søket etter dei gode løysingsstrategiane. Dette vil ha ein dobbel negativ konsekvens:

For det første vil det føre til eit uønskt brot med den didaktiske kontrakten som gjeld rundt forsøkssituasjonen. Dette får vi på grunn av at det fører til eit brot i forutsetninga om at elevane har forventningar til læraren om at han skaper forhold for at dei skal kunne tileigne

seg den aktuelle kunnskapen.
For det andre vil ikkje den adidaktiske situasjonen la seg gjennomføre når ein av forutsetningane for ei vellykka gjennomføring ikkje er til stades. Nærare bestemt vil det ha negative konsekvensar for den handlande situasjonen, der elevane ikkje vil være i stand til å bryte oppgåva ned i meir overkommelege deloppgåver. Eg måtte på denne bakgrunnen være budd på å intervenere når utfordringane vart for store for elevane etter at den adidaktiske situasjonen har oppstått.
Observasjonane eg gjorde tyder på at eg hadde grunn til å være noko skeptisk. Det er rimeleg å hevde at ei av gruppene ikkje hadde kome i mål med forsøket om eg ikkje hadde intervenert ved forskjellige høve.

.**<u>Kapittel 6.1.3:Kjenne att målet</u>**

Elevane hadde problem med å kjenne igjen den ferdige matematiske modellen. Typiske utsegner var av typen
«*Er dette svaret?», eller*
«Alt dette styret for å ende opp med den der?»
Denne reaksjonen vil eg tru har sin bakgrunn i to hovudårsaker.
Den eine ligg i kva arbeidsmetodar dei er opplærde til, og vane med å bruke. Sidan pensumet i den vidaregåande skulen er av ein slik art at omfattande modelleringsprosjekt er vanskelege å få organiserte, vil elevane naturleg nok ha liten eller ingen erfaring med arbeidsmetoden. Mange vil såleis ikkje ha noko klar formeining om korleis ein matematisk modell kan sjå ut.
Den andre hovudårsaka har sin bakgrunn i bruken av Geogebra.
For det første gav Geogebra løysinga på den udempa svinginga på ein litt anna form, $y(t) = A\sin(kt + c) + d$, enn kva læreboka gjorde, $y(t) = \sin(kt)$. Dette førde naturleg nok til ein del usikkerheit og eit behov for å forstå kva dei ulike parametrane i Geogebra sine løysingar representerte.
For det andre møtte elevane ein del uventa utfordringar i samband med datainnsamlinga.
Ei gruppe hadde alt for store datasett, noko som førde til at Geogebra ikkje klarte å handsame datamengda. Ei anna gruppe hadde som nemt i kapittel 5.3.1.4.1, for låg samplingsrate, og vart såleis utsett for aliasing når datasettet vart handsama i Geogebra.
For det tredje oppdaga elevane at om ein hadde for lange dataseriar, gav modellen frå Geogebra svært dårleg samsvar med datasettet. Dei måtte såleis finn ei passande avgrensing av dataseriane.

Til slutt hadde vi det faktum at programvara etter kvart gav så mange ulike løysingar som måtte forkastast at det gav opphav til ekstra vanskar med å gjenkjenne den ferdige modellen. Samla sett førde desse utfordringane med seg at elevane brukte svært mykje mentale ressursar på å få programvara til å fungere tilfredsstillande at dei mista litt fokus på kva dei eigentleg haldt på med og såleis reagerte noko forbausa når eg påpeikte av dei faktisk hadde klart å finne ein brukbar modell.

Ut i frå Blomhøj & Jenssen (Blomhøj, Jenssen 2003) sin forklaringsmodell kan det argumenterast at elevane vart sittande fast i det konkluderande nivået. Dei har klart å arbeide seg gjennom dei føregåande nivåa og kome fram til eit utkast til ein modell. Det dei derimot ikkje klarar er å analysere resultata eller å tolke kva verdiane av dei ulike variablane representerer. Dette hindrar dei i å nå det siste nivået i modelleringsprosessen og vil såleis hindre fullføring av prosessen.

Ut i frå Brousseau kan ein på denne bakgrunnen hevde at elevane vart sittande fast i den validerande delsituasjonen av den adidaktiske situasjon utan å klare å bevege seg over i den institusjonaliserande situasjonen. Ein endar såleis opp med ein ufullenda adidaktisk situasjon, tilsvarande ufullenda læringsutbytte. Dette kan ha som ein sekundær konsekvens at elevane opplever situasjonen som eit brot på den gjeldane didaktiske kontrakten. Dette fordi dei sit att med ei kjensle av å ha vorte presentert for eit problem dei ikkje har forutsetningar for å klare å løyse, noko som jo er ein av dei sentrale pilarane i den didaktiske kontrakten.

På bakgrunn av utsegene nemnt innleiingsvis, er det belegg for å hevde at årsaka til at elevane ikkje kjem seg vidare frå det konkluderande nivået vil være at dei ikkje har den naudsynte erfaringa i å arbeide med matematikk på denne måten.

Kapittel 6.2: Funn frå spørjeundersøking og intervju

Kapittel 6.2.1: Nytten av praksisnærleik

På bakgrunn av tidlegare nemte rolla praksisnær matematikk har hatt i norsk skule, er det grunn til å hevde at det mest sentrale funnet eg gjorde i samband med spørjeundersøkinga var elevane si nær eintydige grunngjeving for eit auka læringsutbytte: Den relativt sett lange tida dei hadde til disposisjon ved teorigjennomgangen. Det var ikkje, som ein i utgangspunktet kunne være freista til å tru, at matematikken var nært knytt opp mot eit praktisk forsøk.

Ein reint praktiske forklaring for denne oppfatninga ligg mest truleg i problema elevane møtte under utviklingsarbeidet med både modellen og med bestemminga av parametrane i differensiallikninga. Fokuset på å få modellen til å stemme med datasetta og å få brukande verdiar for parametrane vart såpass einsidig og intenst at det verka forstyrrande på læringa. Det vart på det viset verken rom for eller mental overskotskapasitet til noko form for refleksjon rundt samanhengen mellom matematikken og den reint praktiske delen av forsøket. Ein eventuell auke i læringsutbyttet gjekk såleis tapt. Denne situasjonen kunne ein sannsynlegvis i stor grad unngått om elevane hadde vore meir vane med den aktuelle undervisningsmetoden.

Med eit meir teoretisk utgangspunkt i frå Blomhøj og Jenssen (Blomhøj, Jenssen 2003) sine tankar vil vi kunne hevde at elevane allereie på det heilt fundamentale nivået,«perceived reality», opplever ein kognitiv svikt. Utfordringane knytt til å meistre den nye matematiske teorien vert såpass store at elevane ikkje klarar å gjennomføre det Blomhøj og Jenssen kallar «formulation of task» (Blomhøj, Jenssen 2003). Det medfører at dei ikkje klarar å nå det neste nivået i modelleringsprosessen. Vanskane med å sjå samanhengen mellom teoridelen og praksisdelen blei såleis såpass store at dei ikkje klarar å inkorporere det i den vidare prosessen.
Om vi søkjer etter ein djupare teoretisk forklaring, kan vi igjen vende oss til Brousseau:
I utgangspunktet var den didaktiske situasjonen rundt modelleringsforsøket basert på ein gjensidig positiv veksleverknad mellom teoridelen og den praktiske delen av forsøket. Denne skulle føre med seg eit merkbart auka læringsutbytte i tillegg til at den skulle ha ein motiverande effekt på elevane. Ein hadde såleis ein overbyggande didaktisk kontrakt i lag med ein gjennomgåande adidaktisk situasjon gjeldande for heile forsøket. Denne gjennomgåande adidaktiske situasjonen kan ein bryte ned i nye adidaktiske delsituasjonar gjeldande for kvart enkelt delproblem elevane er opptekne med på eitt gitt tidspunkt. Det vil sei at det stadig vekk oppsto nye adidaktiske situasjonar med tilhøyrande krav om tilretteleiing. I nokre tilfelle vil elevane ikkje oppleve dette som store utfordringar, i andre tilfelle vil dei gjere det. Brousseau formulerer det slik;

> *«Let us accept that the meaning of a piece of knowledge originates to a large extent from the fact that the student acquires it by adapting to the didactical situations which are put (devolved) to her. We shall assume also that for every piece of knowledge there exists a family of situations to give it an appropriate meaning. In certain cases, there are fundamental situations that are accessible to the student at the required time. These fundamental situations will allow her quite quickly to create a correct*

conception of the knowledge, which can be inserted, when the time comes and without radical modification, into the construction of new knowledge. But let us suppose that some piece of knowledge exists for which the above conditions are not fulfilled; there exist no situations sufficiently accessible, sufficiently efficient and in sufficiently small numbers as to allow students of any age to have access straight away, by adaptation, to a form of the knowledge that could be considered correct and definitive. It is then necessary to accept stages in the learning process».

(Theory of Didactics Situations in Mathematics s 44.)

Med andre ord opplever elevane at dei ikkje klarar å tilpasse den didaktiske situasjonen rundt utfordringane knytt til å sjå samanhengen mellom den teoretiske delen og den praktiske delen av forsøket. Dette medfører at den naudsynte adidaktiske situasjonen ikkje oppstår og resultatet er at elevane ikkje opplever koplinga mellom dei to delane som relevante for læringa si.

Kap 6.2.2: Rolla til forkunnskapar

Det andre sentrale funnet frå spørjeundersøkinga var den avgjerande rolla den innleiande teorigjennomgangen hadde for læringsutbyttet. Det hadde vore forventa at elevane vurderte modelleringsprosessen som eit positivt bidrag til læringa, både i breidda så vel som i djupna. Svara ifrå spørjeundersøkinga indikerer derimot ganske tydeleg at så ikkje er tilfelle.
Som vi var inne på i kapittel 5.3.2.2., kan det hevdast at rolla til forkunnskapane var avgjerande for eit vellykka resultat av forsøket. Her må det presiserast at ut i frå forkunnskapane til elevane ville det være utfordrande for sjølv dei fagleg sterkaste enten å gjere reie for, eller å utleie løysingsteknikkane med integrerande faktorar. Det vil såleis være rimeleg å forvente at elevane uttrykte ein viss skepsis til om dei ville klare dette på eiga hand. I tillegg hadde ingen av elevane vore bort i komplekse tal tidlegare. Dei ville såleis ikkje ha føresetnader til å finne løysingar på differensiallikningane som hadde karakteristiske likningar med komplekse røter. Dette siste momentet tek og lærebøkene elevane nytta konsekvensane av og innfører likning (4) frå kapittel 4, $r = p \pm q\sqrt{-1}$, som ein ad hoc løysing på den karakteristiske likninga til differensiallikninga. (Oldervoll 2015, s….)
Funnet eg referer til er såleis ikkje først og fremst knytt til denne delen av teorigjennomgangen. Snarare er det knytt til å sjå samanhengen mellom løysingane på differensiallikningane og svingerørsla til loddet. Som det kom fram i kapittel 5.3.2.2., opplevde elevane for det første at dette var vanskeleg og for det andre at den viktigaste

suksessfaktoren var solide førekunnskapar. Under intervjua kom det fram at elevane ikkje såg på modelleringa som ei støtte i dette arbeidet, snarare vart det sett meir som eit forstyrrande og /eller eit forvirrande moment. Dei stilte seg vidare eintydig negative til å prøve å lære seg metodikken rundt løysing av dei aktuelle differensiallikningane med utgangspunkt i forsøket framfor gjennom teoriundervisning. Dei framstod med andre ord svært skeptiske til å prøve å tileigne seg nye matematikk-kunnskapar berre ved hjelp av modelleringsforsøk.
Dette er eit funn som Blomhøj og Hoff Kjeldsen (2006) er inne på i artikkelen «Teaching mathematical modelling through project work»:

> *"In general the experiences from the in-service course underline the crucial importance of the introductory phase of a modelling project, where the scene is set in order for the students to be able to engage in serious modelling activities."*
>
> (Blomhøj og Hoff Kjeldsen 2006)

Ein instrumentell årsak til at elevane gjer seg denne erfaringa kan igjen være manglande erfaring frå denne måten å arbeide med matematikk på. Dette medfører at den interne refleksjonen nemnt i kapittel 2.1.3.4 vil opplevast som svært utfordrande og til dels frustrerande. På bakgrunn av klasseobservasjonane eg gjorde og på bakgrunn av tidlegare erfaring frå undervisning vil eg hevde at spørsmåla omhandlande aspekt som avgrensingar til modellen, kva som er utelatt av modellen og kva forenklande antakingar som er gjorde på førehand, vert opplevde som særskild problematiske. Brousseau er inne på liknande tankar når han skriv at:

> *A piece of knowledge is the result of the student's adaptation to a situation, S, which "justifies" this piece of knowledge by making it more or less effective, of different pieces of knowledge leading to learning and of the performance of tasks of different complexity. Depending on the values of variables relevant to S, one can envisage the association of each useful piece of knowledge in S with a region of effectiveness (or cost). The upper envelope of this region can include maxima, separated by saddle points (or any other singularity). Thus, in order to make the student create a particular piece of knowledge, the teacher "must" choose values which make this piece of knowledge optimal with respect to competing pieces of knowledge; progression is by leaps and not smooth.*
>
> *(Guy Brousseau, et al 1997, s98)*

I vårt tilfelle vil *"a particular piece of knowledge"* representere kunnskapen som er naudsynt for at elevane skal kunne sjå samanhengen mellom matematikken frå teoriøktene og observasjonane gjort i den praktiske delen. Problemet vil då være, i følgje Brousseau at elevane ikkje opplever denne kunnskapen som *"optimal with respect to competing pieces of knowledge"*, dvs at den ligg utanfor det han her kallar den effektive regionen til situasjonen S.

Elvane vil difor ikkje ha føresetnad for å oppleve modelleringa som eit positivt bidrag til læringsprosessen. Det som vil være igjen for dei å støtte seg på gjennom prosessen med å utvikle modellen vil såleis være førekunnskapane om den aktuelle matematikken.

Om vi held fram i Brousseau sitt tankeunivers, vil vi kunne supplere forklaringsmodellen for observasjonane om vi tek utgangspunkt i den adidaktiske situasjonen.
Som det nemnt i kapittel 2.2.1 består den didaktiske situasjonen av to komponentar, den didaktiske kontrakten og den adidaktiske situasjonen. Desse er gjensidig avhengige av ein annan. For at læring skal føregå, må forutsetningane for begge komponentane være til stades samt at ein må ta omsyn til konsekvensane dei fører med seg. Vi ser ut i frå dette at den didaktiske kontrakten er broten på minst to punkt ved at to av konsekvensane Brousseau nemnde ikkje er teken omsyn til:
- elevane er meint å være i stand til å tileigne seg kunnskapen under dei tilhøva læraren skaper
- elevane har forventningar til læraren om at han skaper forhold for at dei skal kunne tileigne seg den aktuelle kunnskapen

Vidare har vi at for den adidaktiske situasjonen sin del, at allereie i den delegrande situasjonen sviktar forutsetningane for at ein vellykka adidaktisk situasjon skal kunne oppstå. Elevane vil ikkje klare å akseptere problema som sine eigne og dermed vil dei ikkje klare å skape ein indre motivasjon til å prøve å arbeide seg gjennom utfordringane knytt til problemet. Vi har såleis eit tilfelle der ingen av dei to komponentane i den didaktiske situasjonen er til stades og resultatet er at vi endar opp med ein non-didaktisk situasjon.

Kap 6.3: Samanlikningar av funn

Kort oppsummert kan funna frå observasjonane reiegjort for i kapittel 5.3.1, formulerast på følgjande vis:

1a) Elevane brukte lenger tid på å tileigne seg dei teoretiske kunnskapane enn forventa.

1b) Elevane framstod som usikre og nølande i møtet mellom teori og praksis.

1c) Elevane hadde problem med å kjenne igjen den ferdige matematiske modellen.

Tilsvarande kunne funna frå spørreundersøking og intervju frå kapittel 5.3.2, oppsummerast som:

2a) Elevane oppgav at som viktigaste årsaka til at dei opplevde eit større læringsutbytte var den relativt sett lange tida dei hadde til disposisjon.

2b) Elevane framheva at det er fåfengt å lære seg ny matematikk kun gjennom eit modelleringsforsøk, det vil være naudsynt med til dels solide forkunnskapar om matematikken som skal nyttast under modelleringa.

Spørsmålet er no om det er rom for å hevde at funne i frå klasseobservasjonane vert underbygde av funna frå spørjeundersøkinga og intervju? Eller sagt på ein annan måte:
Kan funna frå spørreundersøkinga og intervju utleiast som ein konsekvens av funna frå klasseobservasjonane?

<u>Frå funn 1a) til funn 2a):</u>
Erfaringa til elevane frå dei to føregåande skuleåra, der dei gjekk gjennom faga 1T og R1, at ein har det svært travelt i matematikktimane. Denne erfaringa medfører at elevane vert spesielt merksame på at dei no har uvanleg mykje tid til disposisjon. Det vil såleis være rimeleg å anta at når elevane no brukte såpass lang tid på å den teoretiske delen av prosjektet, så vil denne delen ligge langt framme i bevisstheita når dei skal reflektere rundt faktorar som spelar inn på læringsutbyttet. Dette vert underbygd av kor eintydige elevane var i å identifisere god tid som det viktigaste bidraget til det auka læringsutbyttet.
Dermed kan vi hevde at funn 2a) kan oppfattast som ein mogleg konsekvens av funn 1a)

<u>Frå funn 1b) til funn 2b)</u>
Dei tre sentrale momenta i brotet på den didaktiske kontrakten gjeldande for ordinære matematikktimar var praksisnærleiken til den aktuelle matematikken, den gode tida elevane fekk til disposisjon og plasseringa av heile forsøket i teknologi og forskingslæret. Det siste av desse gav seg, som vi har sett, utslag i tilfelle av situert læring. Denne vart i stor grad nøytralisert etter kvart som elevane tilvende seg denne nye pedagogiske situasjonen.

Dei to første momenta vil såleis spele ei avgjerande viktig rolle eventuelle endringar i læringsutbytte modelleringsforsøket fører med seg.
Vidare har både funn 1b) og funn 2b) sin hovudårsak i at elevane sin kapasitet for læring vart knytt opp til andre utfordringar enn det å tileigne seg nye matematikkunnskapar; fokuset var på reint tekniske aspekt samt ein ambisjon om å få resultat som samsvarte med dei forventa resultata. Problemet var utfordringane med det reint tekniske innimellom vart såpass store at elevane miste oversynet over kva dei heldt på med. Konsekvensen vart at elevane ikkje såg verdien i praksisnærleiken. Den vart oppfatta som *«….mer forvirrende enn nyttig. I alle fall i starten.»* Elevane sat såleis igjen berre med eit hovudmoment i det didaktiske kontraktbrotet: den gode tida dei hadde til disposisjon.

Frå 1b) til 2b)

Reint intuitivt verkar det rimeleg at dersom elevane ikkje klarar å sjå samanhengen mellom den teoretiske delen og den praktiske delen av forsøket, vil dei sitte att med ei oppfatning om at undervisningsopplegg basert på modellering er svært utfordrande.
Denne oppfatninga vert underbygd av dei underliggande årsakene til funna:
For både funn 1b) og funn 2b) har vi sett at hovudårsaka ligg i ein svikt i elevane si tiltru til at dei arbeider med problem dei faktisk vil klare å løyse og at fundamentet for den adidaktiske situasjonen såleis er fråverande. Vi har ut i frå dette eit samband mellom funn 2b) og funn 1b), der 2b) kan kome som ein følgje av 1b).

Frå 1c) til 2b)
Vi har sett at ein av hovudårsakene til funn 1c) nettopp er sviktande matematikkunnskapar.
Vidare indikerer funnet at elevane er både nølande og usikre på resultatet dei har arbeidd fram. Når elevane er såpass usikre på sine eigne resultat at dei ikkje klarar å identifisere dei som oppnådde målsettingar, vil dette for det første være ei oppleving elevane ikkje lett gløymer. Kjensla av å forstå såpass lite av det dei held på med etter å ha lagt ned såpass mykje tid og krefter vil bidra sterkt til oppfatninga av at modelleringa i seg sjølv er såpass vanskeleg at dei ikkje vil ha mentalt overskot til å lære seg ny matematikk i tillegg.
Det vil såleis ikkje være urimeleg å hevde at funn 2b) kan komme som ein konsekvens av funn 1c)

Sett i lys av punkta ovanfor er vi no i stand til å svare positivt på det innleiande spørsmålet om samsvar mellom funna. Det er fullt ut råd å trekkje trådar mellom funna eg gjorde på

bakgrunn av klasseobservasjonane og funna som har sin bakgrunn i samtalane og spørreundersøkinga gjort med elevane.
Konsekvensen vert såleis, basert på dei same punkta, at det er god grunn til å hevde at truverdet til funna er styrka.

Kapittel 7: Avsluttande betraktningar

Kapittel 7.1: Feilkjelder

Kapittel 7.1.1: Forsøket føregjekk ikkje i matematikktimane

I utgangspunktet kan det hevdast at den største feilkjelda vil være at heile forsøket elevane gjennomførte vart gjort i teknologi og forskingslæretimar og ikkje i dei regulære matematikktimane. Dette er i aller høgste grad ei legitim innvending.
Ein kan på bakgrunn av denne spørje seg om funna eg gjorde i det heile er relevante for matematikkundervisninga i R2 faget; då i særskild grad sett i lys av at elevane fekk såpass mykje tid til disposisjon. Som tilsvar vil eg trekkje fram tre moment:

I)

Hovudreaksjonane til elevane i samband med matematikkundervisninga i teknologi og forskingslære timar kan førast tilbake til den situerte læringa. Som eg var inne på i kap 5.3., var dette ein reaksjon som vart nøytralisert av at elevane vende seg til å verte undervist matematikk i desse timane.
Eg vil ut i frå dette hevda at gitt at elevane får venne seg til dei nye didaktiske omstenda, spelar det liten og ingen rolle for læringa kva fag det i følgje timeplanen skulle ha vore undervist i.

II)

At eg sette av såpass lang tid til gjennomføringa av forsøket, hadde sin hovudårsak i at elevane fekk bygge svingeriggane og utvikle system for målingane sjølve.
Om forsøket skulle ha vorte gjort i ein R2 klasse, kan ein spare mykje tid ved at ein førebur dette på førehand. Det vil såleis ikkje by på dei store utfordringane å tilpasse forsøket dei stramme tidsrammene ein har i R2-faget.

III)

Føremålet med oppgåva er å bryte den gjeldande didaktiske kontrakten i matematikkundervisninga. Det kan argumenterast for at det å flytte matematikkundervisninga til ein annan time vil representere eit meir fullstendig brot med kontrakten enn om ein ikkje hadde gjort det. I denne samanhengen må det påpeikast at det er lite som talar for at dette meir komplette brotet direkte gav seg utslag i noko kjensle av auka læringsutbytte, men den indirekte konsekvensen av brotet gav seg utslag i at eg måtte bruke meir tid, noko som elevane som kjent oppgav som den viktigaste årsaka til auka læring.

Kapittel 7.1.2: Forskar på eigne elevar

Den kan hevdast at det å forske på eigne elevar gjev opphav til feilkjelder ein elles ville unngått. Til dømes kan det stillast spørsmål om ein opptrer som den nøytrale observatøren forskingsidealet etterspør. Det kan vidare stillast spørsmål om ein klarar å oppfylle rollene som observatør og undervisar samstundes og det kan stillast spørsmål om elevane vil være like gode respondentar når dei kjenner den forskande.

Her kan eg berre svare for min eigen del og korleis eg opplevde situasjonen:

Til det første spørsmålet kan det seiast at eg fann det lett å skille dei to rollene. Dette har trulegvis sin bakgrunn i korleis eg legg opp vurderinga av elevane i teknologi og forskingslære. Eit sentralt element i faget er ein kontinuerleg fagleg vurdering av utviklingsprosessen av dei ulike prosjekta elevane til ei kvar tid arbeider med. Eg har såleis opparbeidd meg ein brei erfaring i å vurdere arbeida deira samstundes som eg rettleier dei.

Det andre spørsmålet vart aktualisert i kapittel 5.3.1.1. Her vart det gjort reie for at observasjonsskjemaet eg nytta under klasseobservasjonane måtte forenklast då det ellers vart for vanskeleg å halde fokus på lærarrolla. Dette er såleis ei reell feilkjelde då datamaterialet mitt ikkje vart så detaljert som det elles kunna ha vorte.

På den andre sida kan det og argumenterast for at det å kjenne elevane godt var ein styrke når eg skulle vurdere reaksjonane deira gjennom prosessen med å utvikle modellane. I dette legg eg for det først at eg var i stand til å vurdere kor seriøst meint dei ymse utsegnene elevane kom med under observasjonane var. I tillegg var eg og i betre stand til å vurdere kor seriøse dei var når dei svara på spørreundersøkinga og under intervjua. Eg vil såleis tilbakevise spørsmålet om elevane var like gode respondentar som ei aktuell feilkjelde.

Kap 7.1.3: For tynt datagrunnlag

Eit tredje alvorleg ankepunkt vil være datagrunnlaget eg baserer funna mine på. Eg har allereie nemt at observasjonsskjemaet mitt ikkje var så detaljert som eg først hadde tenkt meg. Vidare inneheld spørjeskjemaet få spørsmål. Og til sist var intervjua korte. Eg kjem nærare inn på desse momenta i kapittelet om moglege forbetringar.

Her vil eg berre på peike følgjande:

Tatt kvar for seg er eg samd i at datasetta er noko spinkle. Spesielt for ein observatør som kun har desse å forhalde seg til. Men sett under eitt, meiner eg dei forskjellige datasetta har ein gjensidig forsterkande effekt og såleis gjev eit rikt og fullgodt bilete av korleis elevane oppfatta gjennomføringa av undervisningsopplegget.

Kapittel 7.2: Vurdering av truverdet og generalisering av funna

Som vi såg i kapittel 6.3, var det ein nær samanheng mellom funna frå observasjonane og funna frå spørreundersøkinga og intervjua. Vidare såg vi i kap 1.4 at tidlegare forsking hadde funne at *«at elevane opplever det som utfordrande å overføre kunnskapane sine innan matematikk til praktiske samanhengar utanfor klasseromma.»*
Til sist har vi frå kapittel 5.3.1.4 at eit av dei sentrale funna i oppgåva nettopp var at *«elevane hadde problem med å overføre det dei hadde lært om differensialligningar i teoridelen til den praktiske delen av forsøket»*

Vi har med andre ord ein situasjon der funna støttar opp om kvarandre i tillegg til at dei stemmer godt overeins med tidlegare relevant forsking.
Desse to momenta gjev samla sett grunn til å hevde at truverdet til funna, ein del feilkjelder til tross, er akseptable.
Når det gjeld i kor stor grad funna kan generaliserast vi det avhenge av kva funn det er tale om. På den eine sida har vi funnet om at hovudårsaka til det auka læringsutbyttet var den gode tida elevane hadde til disposisjon. Dette er eit funn som vanskeleg kan seiast å være generaliserbart.
På den andre sida har vi dei fire andre funna. Desse kan alle seiast å ha sin bakgrunn i funna frå tidlegare forsking; at elevane opplever det som utfordrande å overføre kunnskapane sine innan matematikk til praktiske samanhengar utanfor klasseromma og omvendt.
På denne bakgrunnen må det kunne hevdast at desse funna skulle la seg generalisere.
Til sist har vi samankoplinga mellom nivåa i den adidaktiske situasjonen og trinna til modelleringsprosessen til Blomhøj og Jensen. Denne må kunne seiast å gjelde generelt så lenge det er snakk om modellering, og inntek såleis ein mellomposisjon i samanlikning med dei praktiske funna

Kap 7.3: Forbetringar

Det er fleire punkt der eg ser rom for forbetringar dersom eg skulle ha gjort forsøket om att. desse kan grovt delast inn i praktiske forbetringar og metodiske forbetringar.

Metodiske forbetringar:
Som eg var inne på i kapitelet om feilkjelder, er eit av hovudankepunkta mot observasjonane eg gjorde at dei kan oppfattast som noko knappe.
I ettertid ser eg at eg kunne ha fått hjelp til å gjennomføre observasjonane til dømes. Då ville dei kunne ha inneheldt både fleire og meir detaljerte observasjonar enn eg var i stand til å gjere åleine. I denne samanhengen må det påpeikast at observasjonsskjemaet hadde ein todelt funksjon:
Den eine var den meir opplagte funksjonen som datagrunnlag for oppgåva. Den andre var ein funksjon som påminnar for korleis eg oppfatta stemninga i klassen dei aktuelle timane. Dette siste momentet hadde mest sannsynleg gått tapt om andre skulle ha gjort notata.

Vidare kunne eg hatt eit spørjeskjema som var meir omfattande og detaljert. Dette ville ha styrka truverdet til funna, i tillegg til at andre funn kunne ha vorte avdekka.
Ei innvending mot dette er at om spørjeskjemaet var meir omfattande, ville det ha vore ein reell risiko for at fleire av elevane ikkje ville har brydd seg med å svare på spørsmåla. Det var, som eg har vore inne på tidlegare, eit bevisst val frå mi side å halde talet på spørsmål lågt.

Eg kunne og ha gjennomført enten fleire eller lenger intervju. I ettertid er eg ikkje sikker på om lenger intervju hadde vore så fruktbart all den stund elevane tykte det var såpass vanskeleg å reflektere over si eiga læring. Eg ville difor heller ha gjennomført intervju med fleire elevar.

Det kunne og ha vore gjennomført testar med karakterar for å ha eit meir objektivt grunnlag for å uttale seg om læringsutbyttet av forsøket og ikkje bere opplevinga av utbyttet

Det kan og tenkjast at val av andre teoretiske utgangspunkt kunne vore fruktbart. Som nemt i kapittel 1, er det eit rikt utval av artiklar omhandlande modellering. Eg har basert denne delen av teorien svært tungt på resultata til Blomhøj et.al. Derfor kan det innvendast at teorigrunnlaget er for einsidig basert og burde ha vore breiare.

Praktiske forbetringar:
Her ville eg for det første ha gjort elevane meir bevisste på modelleringsprosessen, gjerne ved å la dei få utvikle modellar på mindre omfattande problem først.
Dei ville då ha fått erfart å måtte gå fleire rundar mellom trinna til Blomhøj og Jensen sin

modell. Dei ville og ha vore meir bevisste på kva ein matematisk modell faktisk er og kva avgrensingar den har. I samband med dette ville eg prøvd å bevisstgjere elevane meir enn kva eg gjorde på nettopp dei forskjellige trinna i modelleringsprosessen.
Eg ville ha hatt kortare teoriøkter. Desse ville eg har avbrote med kortare økter med bygging, eventuelt innhenting av måledata om forsøket føregjekk i ein matematikktime. Dersom eg skulle ha gjennomført forsøket i teknologi og forskingslæretimar, ville eg ha førebudd elevane på at det skulle undervisast matematikk i desse timane på ein grundigare måte enn kva eg gjorde. Dette ville i all hovudsak omhandla motivasjonen for å lære den relevante matematikken som var naudsynt for gjennomføringa av forsøket.
Til sist ville eg og ha kvalitetsikra dei innsamla datasetta betre. Dette ville eg frøst og fremst gjort ved at vi brukte ultralydsensorar til å innhente data framfor kamera på mobiltelefonane.

Kap 7.4: Vidare forsking

Eg nemnte heilt innleiingsvis at eg tidlegare hadde hatt positive erfaringar med undervisning basert på modellering. I motsetning til forsøket reiegjort for i denne oppgåva var dette opplegg basert på matematikk elevane i store grad beherska på førehand. Vidare kravde datasetta frå målingane liten grad av matematisering for å komme fram til gode resultat. Verken under gjennomføringa eller etterpå klaga elevane på at matematikken var for vanskeleg. Snarare tvert om. Den fagleg sterkaste halvdelen av gruppa gav uttrykk for at opplegget vart for banalt. Det kan difor synast som det relativt sett optimale nivået på matematikken ligg ein stad mellom desse to opplegga. Dette nivået kunne vore svært interessant å bestemt.

Eit anna aktuelt spørsmål er knytt til elevane si oppleving av den manglande nytten av den praktiske delen av forsøket. Som nemt tidlegare grunngav dei dette med at matematikken vart for krevande. Det kunne vore spennande å undersøkt kor lågt den matematiske utfordinga må ligge for at elevane skal kunne dra fagleg nytte av den aktuelle praktiske delen av undervisningsopplegget.

Kap 7.5: Svar på problemstillinga

Gjennomføringa av modelleringsforsøket bar på ulike vis preg av at både eg som lærar og elevane var lite trente i denne forma for undervisning. For at forsøket skal være kunne

karakteriserast som vellykka, må det leggast til rette for refleksjon hjå elevane slik at den praktiske aktiviteten representert ved målingane kan knyttast til den abstrakte matematikkunnskapen i klasserommet. Dette vart berre til ei viss grad oppnådd. Det samla resultatet må difor kunne seiast å være noko suboptimalt.
Spørsmålet ein då kan stille seg er om vi trass i dette poenget er i stand til å svare på problemstillinga frå kap 1.3?
Undervegs i arbeidet med oppgåva, har det vorte utvikla eit analysereiskap for modellbasert undervisning fundamentert på to teoretiske fundament. Bruken av desse på innsamla data viser at ambisjonen om å bryte den didaktiske kontrakten vart innfridd, og gjennom dette brotet har elevane måtte forhalde seg matematikken på eit nytt vis. Vidare er det tydlege indikasjonar at elevane meinte at læringsutbyttet har auka. Årsaka til dette kan derimot berre indirekte førast tilbake til brotet på den didaktiske kontrakten. Den låg som vi hugsar i den forlenga tida elevane hadde til disposisjon. Oppfatninga av auka læringsutbytte var såleis ikkje ein førstehands konsekvens av at brotet av den didaktiske kontrakten. Den kunne tvert imot førast tilbake at eg såg meg nøydd til å bruke fleire timar enn eg først hadde planlagt. Dette kunne så vidare førast tilbake at elevane fann det utfordrande å følgje den svært tradisjonelle innleiande matematikkundervisninga. Såleis vart det einaste didaktiske kontraktbrotet i at undervisninga føregjekk i ein teknologi og forskingslæretime.
På den andre sida kunne nettopp det at dei fekk arbeide med den same matematikken i tre veker kunne oppfattast som eit kontraktbrot sett i høve til den normale progresjonen dei opplever i R2 faget.

Svaret på problemstillinga i oppgåva er såleis at elevane vurderte heile forsøket positivt. Dei sat at med ei oppleving av eit auka læringsutbytte. Dette vart oppnådd ved å bryte den gjeldande didaktiske kontrakten, men kanskje ikkje på det viset ein i utgangspunktet hadde trudd.